Применение коротковолнового приближения для исследования и диагностики локальных ионосферных возмущений

А.С. Крюковский¹, Д.С. Лукин², Д.В. Растягаев¹

¹ Российский новый университет, 105005, Москва, ул. Радио, 22, e-mail: <u>kryukovsky@rambler.ru</u>, <u>rdv@rosnou.ru</u>

² Московский физико-технический университет (государственный университет), 141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Инситутский пер. 9, e-mail: lukin@mail.mipt.ru

В работе рассматривается один из метод коротковолнового приближения решения задачи распространения радиоволн в магнитоактивной ионосфере – метод бихарактеристик. Метод позволяет выявить и изучить особенности распространения электромагнитных волн для задач радиолокации и зондировании ионосферы.

This paper considers a method of short-wave approximation of the solution of the propagation of radio waves in a magnetoactive ionosphere - a method of bicharacteristics. The method allows to identify and study the characteristics of electromagnetic wave propagation problems for the radar and sensing of the ionosphere.

Для исследования влияния локальных неоднородностей ионосферы на распространение радиоволн в настоящей работе рассматривается один ИЗ коротковолновых методов – расширенная бихарактеристическая система уравнений [1,2]. Актуальность предложенного исследования определяется необходимостью изучения особенностей распространения электромагнитных волн в ионосферной плазме для решения задач радиолокации, дальней радиосвязи, радионавигации, а также необходимостью диагностики структуры среды распространения при дистанционном зондировании тропосферы, ионосферы или магнитосферы.

Точные решения задач распространения и дифракции волн существуют для ограниченного числа модельных сред и специальных начальных условий. Поэтому для построения решения в сложных средах используются различные приближенные, в частности, асимптотические методы. В основе асимптотических методов описания распространения электромагнитных волн в однородных и неоднородных средах лежат лучевые методы: например, метод геометрической оптики (ГО) или (для нестационарных задач) метод пространственно-временной ГО (ПВГО).

В общем случае процесс распространения волны описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\hat{L}\left(\Lambda, \vec{q}, -i\frac{\partial}{\partial \vec{q}}\right)\vec{u}(\vec{q}) = 0, \qquad (1)$$

где \hat{L} – дифференциальный Λ -оператор (см., например, [3]), а $\vec{q} = (\vec{r}, t)$. Асимптотическое решение ищется в виде суммы

$$u(\Lambda, \vec{r}, t) \cong \sum_{n=1}^{N_g} \exp\left(i\Lambda \Phi_{(n)}\right) \sum_{j=0}^{+\infty} A_{j(n)} (i\Lambda)^{-j}, \qquad (2)$$

здесь $\Lambda >>1$ – параметр асимптотического разложения, \vec{r} и t – пространственные и временная координаты, функции $\Phi(\vec{r},t)$ и $A_{j(n)}(\vec{r},t)$ – определяют эйконал и амплитудные функции, получающиеся как решения уравнений эйконала и переноса соответственно. К числу уравнений типа (1) относятся, например, уравнения Гельмгольца, Шредингера, Клейна-Гордона, волновое уравнение, системы линейных

дифференциальных уравнений с частными производными, например, система уравнений Максвелла.

В приближении геометрической оптики в лучевом разложении сохраняется только главный член асимптотики, и формула (2) принимает вид:

$$\vec{u}(\Lambda, \vec{r}, t) \cong \sum_{n=1}^{N_g} \vec{\ell}_{(n)} G_{(n)} |J_{(n)}|^{-1/2} \exp(i\Lambda \Phi_{(n)}),$$
(3)

где $\vec{\ell}$ – вектор поляризации, J – якобиан (коэффициент), описывающий расходимость потока лучей, G – амплитудный множитель, определяемый условиями излучения волны. Траектории лучей определяются как решения бихарактеристической системы уравнений Гамильтона:

$$\frac{d\vec{q}}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial\Gamma}{\partial\vec{k}}, \quad \frac{d\vec{k}}{d\tau} = -\frac{1}{2} \frac{\partial\Gamma}{\partial\vec{q}}, \tag{4}$$

с начальными условиями

$$\vec{q}\big|_{\tau=0} = \vec{q}^0(\vec{\eta}), \quad \vec{k}\big|_{\tau=0} = \vec{k}^0(\vec{\eta}), \quad \Gamma\big|_{\tau=0} = 0, \quad \dim \vec{\eta} = \dim \vec{q} - 1,$$
 (5)

в которой Гамильтониан Г – это собственное число символа $L(\Lambda, \vec{q}, \vec{k})$ оператора \hat{L} . Вектор поляризации $\vec{\ell}$ для векторных полей можно определить из рассмотрения собственных векторов матрицы символа оператора [3]. Для изотропной среды он может быть получен интегрированием обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d\vec{\ell}}{d\tau} = -\vec{k} \Big(\vec{\ell} \cdot \vec{\nabla} \ln \sqrt{\varepsilon(\vec{r})} \Big), \tag{6}$$

где є – эффективный показатель диэлектрической проницаемости среды распространения. Расходимость лучевого семейства определяется якобианом *J* :

$$J = \det \left\| \frac{\partial(\vec{r}, t)}{\partial(\vec{\eta}, \tau)} \right\|,\tag{7}$$

и характеризует изменение амплитуды поля вдоль лучевой траектории, в то время как функция $\Phi(\vec{r},t)$ характеризует изменение фазы вдоль траектории.

Использование такого подхода к исследованию процессов распространения радиоволн в ионосфере позволило построить эффективный метод бихарактеристик (см., например, Д.С. Лукин [1,2]).

Бихарактеристическая система определяет траекторию луча в расширенном координатном пространстве (\vec{k}, \vec{r}) , где $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ – волновой вектор, $\vec{r} = (x, y, z)$ – координаты точки наблюдения. Траекторию отдельного луча в неоднородной среде можно представить в следующем общем виде (см. [1,4]):

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{\partial\omega^2\varepsilon}{\partial\vec{r}} \bigg/ \bigg(\frac{\partial\omega^2\varepsilon}{\partial\omega} \bigg), \qquad \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = \bigg(2c^2\vec{k} - \frac{\partial\omega^2\varepsilon}{\partial\vec{k}} \bigg) \bigg/ \bigg(\frac{\partial\omega^2\varepsilon}{\partial\omega} \bigg), \tag{8}$$

где ω – круговая частота излучения, *c* – скорость света, *t* – параметр вдоль лучевой траектории, $\varepsilon \equiv \varepsilon(\vec{r}, \vec{k}, \omega)$ – эффективная диэлектрическая проницаемость среды распространения.

В работе рассматривается случай точечного источника излучения, расположенного в начале координат ($\vec{r}(0) = 0$), причем начальный волновой вектор параметрически зависит от углов выхода луча (см. рис.1):

$$k_x(0) = \frac{\omega}{c} \cos \zeta \cos \eta, \qquad k_y(0) = \frac{\omega}{c} \sin \zeta \cos \eta, \qquad k_z(0) = \frac{\omega}{c} \sin \eta. \qquad (9)$$



Рис.1.

Для определения положения каустик и расчета поля в геометрооптическом приближении в работах [1,2] предложена расширенная бихарактеристическая система уравнений:

$$\frac{d\vec{k}_{\varsigma}}{dt} = \frac{\partial}{\partial\varsigma} \left(\frac{\partial\omega^{2}\varepsilon}{\partial\vec{r}} \middle/ \frac{\partial\omega^{2}\varepsilon}{\partial\omega} \right), \qquad \qquad \frac{d\vec{r}_{\varsigma}}{dt} = \frac{\partial}{\partial\varsigma} \left(\left(2c^{2}\vec{k} - \frac{\partial\omega^{2}\varepsilon}{\partial\vec{k}} \right) \middle/ \frac{\partial\omega^{2}\varepsilon}{\partial\omega} \right), \\
\frac{d\vec{k}_{\eta}}{dt} = \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\frac{\partial\omega^{2}\varepsilon}{\partial\vec{r}} \middle/ \frac{\partial\omega^{2}\varepsilon}{\partial\omega} \right), \qquad \qquad \frac{d\vec{r}_{\eta}}{dt} = \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\left(2c^{2}\vec{k} - \frac{\partial\omega^{2}\varepsilon}{\partial\vec{k}} \right) \middle/ \frac{\partial\omega^{2}\varepsilon}{\partial\omega} \right), \quad (10)$$

дополненная соответствующими задаче начальными условиями:

$$\begin{aligned} k'_{x\xi}(0) &= -\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_0}\sin\zeta\cos\eta, \qquad \qquad k'_{x\eta}(0) = -\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_0}\cos\zeta\sin\eta, \\ k'_{y\xi}(0) &= -\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_0}\sin\zeta\sin\eta, \qquad \qquad k'_{y\eta}(0) = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_0}\cos\zeta\cos\eta, \\ k'_{z\xi}(0) &= \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_0}\cos\zeta, \quad k'_{z\eta}(0) = 0, \\ \vec{r}'_{\zeta}(0) &= 0, \qquad \qquad \vec{r}'_{\eta}(0) = 0. \end{aligned}$$
(11)

Таким образом, бихарактеристическая система дополняется 12-ю уравнениями, которые решаются совместно.

Получив решение бихарактеристической системы (10) можно вычислить якобиан *J* расходимости лучевой трубки:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & T_1 \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & T_2 \\ \frac{\partial z}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & T_3 \end{vmatrix}, \qquad \qquad \vec{T} = \left(2c^2 \vec{k} - \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \vec{k}} \right) / \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega} \qquad (12)$$

и найти амплитуду поля луча в каждой точке пространства, которую он достигает:

$$A = A_0 \sqrt{\left| \frac{J_0}{J(\vec{r})} \right|}$$
(13)

В формуле (13) J_0 – якобиан расходимости на небольшом расстоянии от источника (в расчетах был условно выбран 1 м), а A_0 – значение амплитуды поля на этом

расстоянии. При необходимости в *A*₀ можно учесть диаграмму направленности излучателя.

В случае магнитоактивной плазмы эффективная диэлектрическая проницаемость может быть представлена в следующем виде (см., например, [4,5]):

$$\varepsilon_{\pm} = 1 - \frac{2\nu(1-\nu)}{2(1-\nu) - u\sin^2 \alpha \pm \sqrt{u^2 \sin^2 \alpha + 4u(1-\nu)^2 \cos^2 \alpha}},$$
(14)

где

$$v = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{4\pi e^2 N}{m_e \omega^2}, \qquad u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} = \frac{e^2 H_0^2}{m_e^2 c^2 \omega^2}.$$
 (15)

Здесь e – заряд электрона, m_e – масса электрона, H_0 – абсолютная величина напряженности магнитного поля Земли, N – профиль электронной концентрации. Знак «+» соответствует обыкновенной волне, а знак «-» соответствует необыкновенной волне.

Величина α в формуле (14) определяет угол между волновым вектором и вектором напряженности магнитного поля Земли $\vec{H}_0 = (H_{0x}, H_{0y}, H_{0z})$ (см. рис. 1). Выражение для угла может быть представлено в виде:

$$\cos \alpha = \frac{H_{0x}k_x + H_{0y}k_y + H_{0z}k_z}{H_0 \left|\vec{k}\right|} \,. \tag{16}$$

Рассмотрим некоторые результаты моделирования. В работе рассматривается коротковолновое распространение в случай двухслойной плазмы при наличие локальных неоднородностей.

Пусть профиль электронной концентрации двухслойной ионосферной плазмы имеет вид:

$$N(\vec{r}) = N_0 \left\{ \tilde{N}_F + \beta \, \tilde{N}_E + \sum_{i=1}^{\mu} F_i(x, y, z) \right\},\tag{17}$$

где функции

$$F_{i}(x, y, z) = \beta_{loc}^{i} \exp\left[-\left(\left(\frac{x - x_{loc}^{i}}{x_{m3}^{i}}\right)^{2} + \left(\frac{y - y_{loc}^{i}}{y_{m3}^{i}}\right)^{2} + \left(\frac{z - z_{loc}^{i}}{z_{m3}^{i}}\right)^{2}\right)\right]$$
(18)

описывают локальные неоднородности среды распространения эллипсоидальной формы. Величина

$$\tilde{N}_{E} = \exp\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{z - z_{02}}{z_{m2}/2} \right) - \sec \chi \exp\left(- \left(\frac{z - z_{02}}{z_{m2}/2} \right) \right) \right]$$
(19)

это нормированное значение электронной концентрации слоя Е, а

$$\widetilde{N}_F = \exp\left[-\left(\frac{z - z_{01}}{z_{m1}}\right)^2\right]$$
(20)

- нормированное значение электронной концентрации слоя F₂.

Здесь введены следующие обозначения:

 z_{01} – высота максимума основного слоя F_2 ,

*z*_{*m*1} – условная полутолщина основного слоя *F*₂,

*z*₀₂ – высота максимума нижнего слоя *E*,

 z_{m2} – условная полутолщина нижнего слоя E, (расстояние от высоты максимума вниз, на котором электронная концентрация падает в е раз)

β – безразмерный коэффициент, характеризующий степень ионизации нижнего слоя по отношению к основному,

 N_0 – электронная концентрация в максимуме основного слоя.

Если не оговорено противное, при численном моделировании применялись следующие значения перечисленных выше параметров: $N_0 = 2 \ 10^6 \text{ cm}^{-3}$, $H_0 = 0,36 \ \Im$, z_{m1} = 100 км, z_{m2} = 10 км, z_{01} = 300 км, z_{02} = 100 км, ζ =0, χ =0.

Таким образом, предполагалась, что изначально распространение осуществляется в плоскости (x,z). В настоящих расчетах амплитуда напряженности магнитного поля предполагалась постоянной, а ориентация относительно системы координат задавалась двумя углами γ и φ:

(21)



Рассмотрим результаты численного моделирования. На рис. 2 показано модельное распределение электронной концентрации по высоте в ионосферном плазменном слое ($\beta=0$) при отсутствии (а) и наличии (б) локальной неоднородности.



41

На рис. 3 приведена лучевая структура в плоскости (x, z) в случае распространения необыкновенной волны при отсутствии локальных возмущений. Часть лучей при углах падения, близких к вертикальному, проходят ионосферный слой, а остальные возвращаются на Землю и образуют каустическое остриё. Направление вектора напряженности магнитного поля определяется углами $\gamma=3\pi/4$ и $\phi=\pi/2$.

При возникновении локальной области пониженной электронной концентрации (с параметрами $\mu = 1$, $x_{m3} = y_{m3} = z_{m3} = 10 \, \kappa M$) на высоте максимума слоя ($x_{loc} = 100 \, \kappa M$, $z_{loc} = 300 \, \kappa M$, $y_{loc} = 0$, $\beta_{loc} = -0.3$) возникает возмущение лучевой структуры (рис. 4). Видно, что неоднородность заставляет луч огибать себя несколько раз. При этом на Земле образуется дополнительная «мёртвая зона».



На рис. 5 и 6 сопоставлены лучевые структуры в плоскостях (y, z), образующиеся в невозмущённом (рис. 5) и возмущённом случаях (рис. 6). Если бы магнитное поле отсутствовало, все лучи в этой плоскости соответствовали бы линии y=0. При наличии магнитного поля лучи отклоняются влево, а после выхода из ионосферы движется вдоль оси y, но уже со смещением. Видно, что неоднородность нарушает регулярность лучевой структуры, и поскольку луч огибает неоднородность, прежде чем продолжить свой путь, он отклоняется в самых различных направлениях.



На рис. 7 и 8 показаны лучевые структуры в горизонтальной проекции, то есть в плоскости (x, y) в невозмущенном и возмущенном случаях соответственно. Видно, что в невозмущенном случае лучи в этой плоскости также образуют каустическое остриё, как и на рис. 3. В возмущенном случае луч не только выходит из плоскости распространения (рис. 7), но вращается в плоскости (x, y) (рис. 8), подобно структуре, представленной и на рис. 4.

Рассмотрим случай, когда в ионосфере имеются три сферические локальные неоднородности с теми же параметрами как и выше, центры которых расположены в

точках с координатами (50 км, 0 км, 300 км), (175 км, 0 км, 275 км) и (-100 км, 0 км, 200 км) (см. рис 9).



На рис. 10-12 показана лучевая структура необыкновенной волны в случае, когда величина угла $\gamma = \pi/4$. В плоскости (*x*, *z*) центральная неоднородность стягивает лучи в «узел» (рис. 10), а боковые неоднородности формируют дополнительные каустические структуры («горбы») на левой и правой ветвях внешних каустик. Рис.11 (проекция на плоскость (*y*, *z*)) аналогичен рис. 6, но следует отметить, что он как бы зеркально отражен относительно вертикальной оси. Это объясняется изменением направления магнитного поля: предыдущий случай относился к южному полушарию, а настоящий случай к северному. На рис. 12 показана проекция лучевой структуры на плоскость (*x*, *y*).



Рис. 13-15 представляют лучевую структуру обыкновенной волны при тех же параметрах неоднородностей и той же рабочей частоте. Лучевая структура вместе с каустиками как бы подтянулась вверх (рис. 13), причем количество лучей проходящих ионосферу, заметно увеличилось. Качественно изменилась и лучевая структура в плоскости (x, y) (рис. 15).

Рассмотрим случай, когда локальные неоднородности присутствуют в двухслоевой модели ($\beta = 0,4$). Результаты моделирования соответствуют случаю электронной

концентрации с включенными неоднородностями, центры которых расположены в точках с координатами (165 км, 0 км, 105 км) и (100 км, 0 км, 290 км) (рис. 16).



На рис. 17-19 показана лучевая структура поля необыкновенной волны в случае, когда все лучи отражаются от ионосферы, поскольку рабочая частота равна 13 МГц. Результаты моделирования показывают (см. рис. 17 и 18), что в плоскости (x, z) над каустикой возникает область, где лучи наматываются на область неоднородности («петли» лучей), причем они наматываются на неоднородность не только в одной плоскости, а образуют трехмерную структуру, подобную наматыванию нитки на клубок (см. рис. 19, то есть плоскость (x, y)). Таким образом, лучевые петли возникают не только в окрестности каустического острия, как в предыдущем случае, но и при полном отражении лучей от ионосферы в окрестности гладкой каустики. Отсюда следует, что ионосферный аттрактор – устойчивое образование при наличии локальных неоднородностей.



Локальная неоднородность, расположенная в окрестности слоя Е, приводит к небольшому изменению каустической структуры создаваемой этим слоем (рис. 17).

Рассмотрим результаты моделирования, когда область повышенной электронной концентрации лежит вне слоя (рис. 20): $x_{loc} = z_{loc} = 100 \, \kappa m$, $y_{loc} = 0$, $\beta_{loc} = 0,3$. Тогда неоднородность выталкивает лучи из области распространения, и на Земле возникают области с пониженной напряженностью электромагнитного поля (см. рис. 21). В данном примере длина этой зоны более 200 км.



Вместо обычного каустического острия возникает структура, соответствующая особенности «ласточкин хвост» – А₄.



Рис. 22 иллюстрирует выход луча из плоскости распространения в этом случае. Следует особо отметить точки возврата лучевых траекторий в плоскости (y, z), хорошо видные на рисунке и характерные для лучей, отразившихся от слоя. На рис. 23 представлена лучевая структура в плоскости (x, y). Видная сложная каустическая структура лучей, отразившихся от ионосферы с образованием волновой каспоидной катастрофы «ласточкин хвост». Эти лучи сначала смещаются в боковую плоскость, а затем частично возвращаются. Лучи, прошедшие ионосферу, смещаются в боковой плоскости на величину, определяемую углом выхода луча. Чем направление луча ближе к вертикальному, тем смещение меньше. Выйдя из ионосферы, лучи движутся параллельным курсом.

Рассмотрим результаты моделирования при наличии регулярных возмущений. Пусть величина максимума ионосферного слоя периодически меняется.

$$N(\vec{r}) = N_0 \left(\tilde{N}_F + \beta \, \tilde{N}_E \right) \left(1 + \beta_1 \sin\left(\frac{\pi \, x}{2x_1}\right) \right), \qquad \beta_1 = -0.3 \,, \qquad x_1 = 80 \,\,\kappa m \,, \tag{22}$$



На рис. 24 показано распределение электронной концентрации справа и над источником излучения с рабочей частотой 13,5 МГц. Видно (рис. 25), что за счет понижения максимума электронной концентрации над источником необыкновенная волна, проходя ионосферный слой, фокусируется, причем имеет место инверсия лучевой структуры. В плоскости (*y*, *z*) (см. рис. 26) все лучи расщепляются.



На рис. 27 видно, что резко изменилась и структура лучей в плоскости (x, y). В результате инверсии область фокусировки часть лучей отправила налево, а часть направо.





Как и в работе [4] рассмотрим модификацию лучевой структуры «паук Д.С. Лукина» в присутствии локальной неоднородности. Лучевое семейство образовано лучами, выходящими из источника в разные стороны почти вертикально (η = 88°).



На рис. 28, 30, 32 приведены лучевые структуры в плоскостях (x, z), (y, z) и (x, y) в случае отсутствия локальной неоднородности. Рис. 32 — это «паук Д.С. Лукина». Видно, что лучи, вышедшие параллельно оси y, не отклоняются. Остальные лучи отклоняются.

На рис. 29, 31, 33 приведены лучевые структуры в плоскостях (x, z), (y, z) и (x, y) при наличии локальной неоднородности, центр которой расположен в точке с координатами (10 км, 0 км, 300 км). Неоднородность, разрушая регулярную структуру, приводит к фокусировке лучей (рис. 29). В плоскости (y, z) наличие неоднородности приводит к появлению фокусировки на высоте 300 км (рис.31), а в плоскости (x, y) возникает каустика с каустическим остриём – структура, характерная для отражения лучей от вогнутой поверхности (рис. 33).

Таким образом, в настоящей работе методами бихарактеристической системы уравнений рассмотрены особенности лучевого распространения обыкновенной и необыкновенной электромагнитных волн в анизотропной ионосферной плазме при наличии локальных неоднородностей (см также [6-9]). Моделирование показывает, что наличие неоднородностей приводит к появлению сложных каустических структур типа катастроф каспоидного типа. Рассмотрены случаи неоднородностей как увеличивающих, так и понижающих электронную концентрацию ионосферной плазмы. Исследованы модели со слоями F и E, а также случаи присутствия одновременно нескольких локальных неоднородностей. Выявлено устойчивое образование лучевых петель ионосфере – ионосферный аттрактор. Исследована модификация лучевой структуры «паук Д.С. Лукина» в присутствии локальной неоднородности.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект № 10-02-01103-а).

Литература

1. Казанцев А.Н., Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. Метод исследования распространения радиоволн в неоднородной магнитоактивной ионосфере. // Космические исследования, 1967. Т. 5. Вып. 4. С. 593–600.

2. Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. Применение метода характеристик для численного решения задач распространения радиоволн в неоднородной и нелинейной среде. // Радиотехника и электроника, 1969. Т. 14. № 9. С. 1673–1677.

3. Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. М.: МФТИ, 1982. 159 с.

4. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Исследование особенностей распространения коротких радиоволн в неоднородной анизотропной ионосфере. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2009. Т.14. № 8. С. 17-26.

5. Дэвис К. Радиоволны в ионосфере. М. : Мир, 1972. 502 с.

6. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Исследование влияния локальных неоднородностей ионосферной плазмы на распространение коротких радиоволн. //Вестник Российского нового университета. Серия «Управление, вычислительная техника и информатика» / М.: РосНОУ, 2010. Выпуск З. С. 17-25.

7. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Математическое моделирование распространения радиоволн в анизотропной неоднородной ионосфере. //Вестник Российского нового университета. Серия «Управление, вычислительная техника и информатика» / М.: РосНОУ, 2009. Выпуск 2. С. 7-14.

8. Kryukovsky A.S., Lukin D. S., Rastyagaev D. V. Caustic Singularities Arising at Propagation of Short Radiowaves in Anisotropic Ionospheric Plasma [Электронный ресурс]: // PIERS Proceedings, August 18-21, Moscow RUSSIA, 2009. PP. 1998-2001. – Режим доступа http://piers.mit.edu/piersproceedings/piers2k9MoscowProc.php, свободный.

9. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Моделирование каустических структур при распространении электромагнитных волн в неоднородной анизотропной плазме. //Труды Х международной научной конференции «Цивилизация знаний: глобальный кризис и инновационный выбор России», секция «Математическое и численное моделирование», Москва, 24-25 апреля 2009 г.– Часть І.– М.: РосНОУ, 2009.– С. 288–296.