

Исследование дифракционных и интерференционных структур типа волновых катастроф средствами информационных технологий

А.С. Крюковский¹, Д.С. Лукин², Д.В. Растягаев³

¹ Российский новый университет, 105005, Москва, ул. Радио, 22. kryukovsky56@yandex.ru

² Московский физико-технический институт, 141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9. luknet@yandex.ru

³ Российский новый университет, 105005, Москва, ул. Радио, 22. rdv@rosnou.ru

В работе представлены результаты математического и численного моделирования дифракционных и интерференционных структур типа волновых катастроф. Представлена информационная система, обобщающая информацию о волновых катастрофах и являющаяся основой для построения справочника моделирования асимптотических решений задач рассеяния, дифракции и распространения радиоволн в различных средах. Информационная система включает в себя наиболее полные таблицы основных, краевых и угловых катастроф, диаграммы подчинения, результаты моделирования специальных функций волновых катастроф, а также каустических и лучевых структур. Доступ к информационной системе основан на применении веб-технологий. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 15-02-04206, 17-02-01183.

The paper presents the results of mathematical and numerical simulation of diffraction and interference structures such as wave catastrophes. An information system that systematizes information on wave disasters and is the basis for constructing a directory for modeling asymptotic solutions to problems of scattering, diffraction, and propagation of radio waves in various media is presented. The information system includes the most complete tables of basic, edge and corner catastrophes, subordination diagrams, simulation results for special functions of wave catastrophes, and also caustic and ray structures. Access to the information system is based on the use of web technologies. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, grants No 15-02-04206, 17-02-01183.

Волновая теория катастроф и её методы получили широкое применение при решении задач в различных разделах физики: акустики, квантовой физики, радиофизики, термодинамики и нелинейной динамики. В частности, ведутся активные исследования, посвященные теоретическому описанию дифракционных и интерференционных структур волновых полей в фокальных и переходных областях (см., например, [1,2]).

Понятие «катастрофа» в волновой физике связано с набором геометрических и математических объектов, позволяющих выполнять моделирование физических систем и процессов. Во-первых, катастрофы — это математические объекты — особенности дифференцируемых отображений многообразий (с краем или без), то есть собственно «катастрофы», характеризующиеся набором числовых и алгебраических параметров [3-5]. Во-вторых, катастрофы — это геометрические объекты — эталонные лучевые и каустические структуры, описывающие особенности отображений и являющиеся структурно-устойчивыми в некотором пространстве параметров конечной размерности [6-10]. В-третьих, катастрофы — это амплитудные и фазовые структуры специальных функций, связанных с рассматриваемыми особенностями, то есть специальные функции волновых катастроф (СВК) [7, 9-11]. Данные функции дают возможность описать эталонную структуру физических полей или переходных процессов в окрестности «катастрофы».

Существует морфология катастроф. Катастрофы разделяются на классы, в рамках которых образуются конечные или бесконечные серии. Катастрофы внутри серий и между сериями связаны схемами подчинений (примыканий), причем при продвижении в рамках серий особенностей с ростом числовых параметров, их характеризующих,

быстро усложняется как каустическая (и лучевая), так и волновая структура катастрофы (иными словами СВК) [1-3,11].

Кратко сформулируем основные результаты применения волновой теории катастроф к исследованию процессов распространения и дифракции волн в неоднородных средах.

В основе асимптотических методов описания распространения электромагнитных волн в однородных и неоднородных средах лежат лучевые методы и, в первую очередь, метод геометрической оптики (ГО) или (для нестационарных задач) метод пространственно-временной ГО (ПВГО). Если процесс распространения волны описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных [6]

$$\hat{L}\left(\Lambda, \vec{q}, -i \frac{\partial}{\partial \vec{q}}\right) \vec{u}(\vec{q}) = 0, \quad (1)$$

где \hat{L} – дифференциальный Λ -оператор-матрица,

а $\vec{q} = (\vec{r}, t)$, то ГО решение ищется в виде суммы

$$u(\Lambda, \vec{r}, t) \cong \sum_{n=1}^{N_g} \exp(i\Lambda \Phi_{(n)}) \sum_{j=0}^{+\infty} A_{j(n)}(i\Lambda)^{-j}, \quad (2)$$

где $\Lambda \gg 1$ – параметр асимптотического разложения,

\vec{r} и t – пространственные и временная координаты,

а $\Phi(\vec{r}, t)$ и $A_{j(n)}(\vec{r}, t)$ – эйконал и амплитудные функции, получающиеся как решения уравнений эйконала и переноса соответственно.

К уравнениям типа (1) относятся уравнения Гельмгольца, Шредингера, Клейна-Гордона, волновое уравнение, системы линейных дифференциальных уравнений с частными производными, например, система уравнений Максвелла, а также системы линейных уравнений с псевдо дифференциальными операторами.

В ГО приближении в лучевом разложении сохраняется только главный член асимптотики, и формула (2) принимает вид:

$$\vec{u}(\Lambda, \vec{r}, t) \cong \sum_{n=1}^{N_g} \vec{\ell}_{(n)} G_{(n)} |J_{(n)}|^{-1/2} \exp(i\Lambda \Phi_{(n)}) \quad (3)$$

Здесь $\vec{\ell}$ – вектор поляризации, J – якобиан (коэффициент), описывающий расходимость потока лучей, G – амплитудный множитель, определяемый условиями излучения волны. Траектории лучей находятся как решения бихарактеристической системы уравнений Гамильтона:

$$\frac{d\vec{q}}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}}, \quad \frac{d\vec{p}}{d\tau} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{q}}, \quad (4)$$

с заданными начальными условиями

$$\vec{q}|_{\tau=0} = \vec{q}^0(\vec{\eta}), \vec{p}|_{\tau=0} = \vec{p}^0(\vec{\eta}), \mathcal{H}|_{\tau=0} = 0, \dim \vec{\eta} = \dim \vec{q} - 1, \quad (5)$$

в которой Гамильтониан \mathcal{H} – это собственное число символа $L(\Lambda, \vec{q}, \vec{p})$ оператора \hat{L} .

Вектор поляризации $\vec{\ell}$ для векторных полей можно определить из рассмотрения собственных векторов матрицы символа оператора. Для изотропной среды он может быть получен интегрированием обыкновенного дифференциального уравнения [6]:

$$\frac{d\vec{\ell}}{d\tau} = -\vec{k} \left(\vec{\ell} \cdot \vec{\nabla} \ln \sqrt{\varepsilon(\vec{r})} \right), \quad (6)$$

где ε – эффективный показатель диэлектрической проницаемости среды распространения.

Расходимость лучевого семейства определяется якобианом J :

$$J = \det \left\| \frac{\partial(\vec{r}, t)}{\partial(\vec{\eta}, \tau)} \right\|, \quad (7)$$

и характеризует изменение амплитуды поля вдоль лучевой траектории, в то время как функция $\Phi(\vec{r}, t)$ характеризует изменение фазы вдоль траектории. Каждому лучу лучевого семейства отвечает фиксированное значение параметра $\vec{\eta}$, а τ – параметр, меняющийся вдоль луча.

При проектировании лагранжева многообразия из фазового пространства в конфигурационное пространство возникают огибающие семейств лучей (каустики) с особыми точками и линиями. Каустики и их особенности (волновые катастрофы) соответствуют фокальными областям. На каустиках якобиан (7) обращается в нуль, что делает ГО решение (3) бессмысленным. На самом деле ГО решение становится неприменимым не только на самих каустиках, но и в окрестности каустических поверхностей, при переходе через которые число действительных лучей N_g скачком меняется на два, причем на самих каустиках все коэффициенты лучевого разложения (2) стремятся к бесконечности, поскольку они обратно пропорциональны различным положительным степеням якобиана J . Поэтому все лучевые методы являются неравномерными.

Важным этапом в классификации различных типов фокусировок поля и построении равномерных асимптотических решений в окрестности особых каустических структур является применение теории особенностей дифференцируемых отображений – теории катастроф. Результаты теории катастроф были первоначально применены к анализу равномерной интегральной асимптотики поля, полученной в форме канонического оператора В.П. Маслова [12, 6], что позволило установить соответствие между типом фокусировки волнового поля и особенностями огибающих лучевых семейств – каустиками. В работе [13] Д.С. Лукину и Е.А. Палкину удалось из КОМ получить специальные функции, равномерно описывающие поля в областях не только одномерных, но и двумерных фокусировок омбилического типа.

Кратко изложим достигнутые результаты, опираясь на понятие обобщенного эйконала – эйконала виртуальных лучей.

Пусть $\Phi(\vec{r}^0, t^0, \vec{r}, t)$ – обобщенный эйконал, вычисленный вдоль виртуальных лучей, испущенных из точки (\vec{r}^0, t^0) и пришедших в точку (\vec{r}, t) . Классическим примером являются виртуальные лучи гюйгенсовых источников, а также виртуальные лучи, связанные с построением различных интегральных равномерных асимптотик. Аргументы функции Φ можно разделить на две группы: внешние аргументы $\vec{\alpha}$ (пространственные и временные координаты точки наблюдения, параметры среды распространения и другие) и внутренние аргументы $\vec{\eta}$, параметризующие семейство виртуальных лучей, приходящих в фиксированную точку наблюдения. Тогда система уравнений:

$$\frac{\partial \Phi(\vec{\eta}, \vec{\alpha})}{\partial \eta_j} = 0; j = 1, \dots, \kappa; \quad \kappa = \dim \vec{\eta}; \quad d = \dim \vec{\alpha} \quad (8)$$

определяет седловые точки функции Φ :

$$\vec{\eta}_{(n)}(\vec{\alpha}), \quad n = 1, \dots, N_g, \quad (9)$$

где N_g – число ГО лучей (уже не виртуальных, а физических), пересекающихся в заданной точке $\vec{\alpha}$ пространства \mathbf{R}^d .

Уравнения (8) можно также рассматривать как уравнения ГО лучей в пространстве \mathbf{R}^d .

Функция

$$\Phi_{(n)} = \Phi(\vec{\eta}_{(n)}, \vec{\alpha}) \quad (10)$$

это эйконал физических лучей, приходящих в точку наблюдения $\vec{\alpha}$.

Условием образования каустики при $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}^c$ является, помимо (8), обращение в нуль детерминанта матрицы Гесса функции Φ :

$$\text{Hess}\Phi = \left\| \frac{\partial \Phi(\vec{\eta}, \vec{\alpha})}{\partial \eta_i \partial \eta_j} \right\|. \quad (11)$$

Если при этом коранг матрицы Гесса равняется единице, то говорят, что фокусировка поля одномерная, и равномерные асимптотики (см., например, [14-15]) описывают лишь одномерные фокусировки каспоидного типа (то есть особенности A_N).

Если коранг равен двум, то двумерная и так далее. Теория катастроф позволила построить равномерные асимптотики в случае двумерных фокусировок, возникающих естественным образом в трехмерных конфигурационных пространствах, равномерные асимптотики в случае трехмерных фокусировок, возникающих в четырехмерном пространстве-времени [16-18], а также в случае фокусировок более высокого порядка, возникающих в пространствах соответствующей размерности.

Согласно теории катастроф (см., например, [19]) функцию $\Phi(\vec{\eta}, \vec{\alpha})$ в окрестности $\Omega \subset R^k \times R^d$ особой точки $(\vec{\eta}^c, \vec{\alpha}^c)$ можно заменить её универсальной деформацией F_Σ :

$$\Lambda \Phi(\vec{\eta}, \vec{\alpha}) = \Lambda \theta(\vec{\alpha}) + F_\Sigma(\vec{x}, \vec{a}(\Lambda, \vec{\alpha}), \vec{\lambda}(\Lambda, \vec{\alpha})), \quad (12)$$

выполнив невырожденную замену переменных:

$$\vec{\eta} = \vec{\eta}(\Lambda, \vec{x}, \vec{\alpha}). \quad (13)$$

Универсальная деформация имеет вид [1,3,11]:

$$F_\Sigma(\vec{x}, \vec{a}, \vec{\lambda}) = \varphi_0^\Sigma(\vec{a}, x_1, \dots, x_{\bar{k}}) + \sum_{j=1}^L \lambda_j \varphi_j^\Sigma(x_1, \dots, x_{\bar{k}}) + \sum_{j=1+\bar{k}}^k \pm x_j^2, \quad (14)$$

где Σ – символ особенности;

φ_0^Σ – нормальная форма особенности;

φ_j^Σ – ($j > 1$) – возмущения универсальной деформации;

$a_j, j = 1, \dots, m$ – функциональные модули;

m – модальность;

λ_j – коэффициенты универсальной деформации;

L – коразмерность особенности, $L = \dim \vec{\lambda}$;

\bar{k} – коранг особенности, равный корангу матрицы Гесса (11);

$\mu = N_g = N = 1 + m + L$ – кратность особенности.

Например, для особенностей $\Sigma = D_N, E_6, E_7, E_8, X_9, J_{10}, P_8, Q_{10}$ универсальные деформации имеют вид (в случае $k = \bar{k}$):

$$F_{D_N}(\vec{x}, \vec{\lambda}) = x_1^{N-1} \pm x_1 x_2^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1 + \lambda_3 x_1^2 + \dots + \lambda_{N-1} x_1^{N-2} \quad (15)$$

$$F_{E_6}(\vec{x}, \vec{\lambda}) = x_1^4 \pm x_2^3 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1 + \lambda_3 x_1^2 + \lambda_4 x_1 x_2 + \lambda_5 x_1^2 x_2 \quad (16)$$

$$F_{E_7}(\vec{x}, \vec{\lambda}) = x_2^3 \pm x_2 x_1^3 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1 + \lambda_3 x_1^2 + \lambda_4 x_1 x_2 + \lambda_5 x_1^3 + \lambda_6 x_1^4 \quad (17)$$

$$F_{E_8}(\vec{x}, \vec{\lambda}) = x_1^{N-1} \pm x_1 x_2^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1 + \lambda_3 x_1^2 + \lambda_4 x_1 x_2 + \lambda_5 x_1^3 + \lambda_6 x_1^2 x_2 + \lambda_7 x_1^3 x_2 \quad (18)$$

$$F_{X_9}(\vec{x}, a, \vec{\lambda}) = x_1^4 + a x_1^2 x_2^2 + x_2^4 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1 + \lambda_3 x_1^2 + \lambda_4 x_2^2 + \lambda_5 x_1 x_2 + \lambda_6 x_1^2 x_2 + \lambda_7 x_2^2 x_1 \quad (19)$$

$$F_{J_{10}}(\vec{x}, a, \vec{\lambda}) = x_1^3 + ax_1^2 x_2^2 + x_1 x_2^4 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_5 x_2^4 + \lambda_6 x_1 x_2 + \lambda_7 x_1 x_2^2 + \lambda_8 x_1^2 x_2 \quad (20)$$

$$F_{P_8}(\vec{x}, a, \vec{\lambda}) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + ax_1 x_2 x_3 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_1^2 + \lambda_5 x_2^2 + \lambda_6 x_3^2 \quad (21)$$

$$F_{Q_{10}}(\vec{x}, a, \vec{\lambda}) = x_1 x_2^3 + x_3^3 + x_1^4 + ax_3 x_1^3 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3 + \lambda_3 x_1 x_3 + \lambda_4 x_1 + \lambda_5 x_1^2 + \lambda_6 x_1^3 + \lambda_7 x_3 x_1 + \lambda_8 x_3 x_1^2 \quad (22)$$

Формула (12) справедлива и в случае краевых, угловых и обобщенных краевых катастроф.

Тип вырождения обобщенного эйконала $\Phi(\vec{\eta}, \vec{\alpha})$ соответствует определенному типу каустической особенности Σ , а она в свою очередь определенному типу дифракционной структуры волнового поля. Поэтому поле в окрестности каустической особенности оказывается "пропорциональным" специальной функции волновой катастрофы (СВК) вида [6, 11, 19]:

$$u(\Lambda, \vec{r}, t) \propto \exp[i\Lambda\theta] \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[iF_{\Sigma}(\vec{x}, \vec{a}, \vec{\lambda})] d x_1 \dots d x_{\bar{k}}. \quad (23)$$

Таким образом, в окрестности каустической особенности реально наблюдаемая структура поля оказывается подобной некоторой эталонной.

Применение теории основных катастроф к построению асимптотических решений получило название теории волновых катастроф и нашло широкое применение в различных областях физики.

Информационная система «Волновые катастрофы в радиофизике, акустике и квантовой механике» [20, 21], систематизирующая данные о волновых катастрофах, позволяет собрать воедино информацию о волновых катастрофах, их характеристиках. Данная система [22] содержит результаты моделирования эталонных структур для типов катастроф относительно малой размерности, наиболее часто встречающихся в задачах волновой физики. Информационная система может быть применена для анализа и решения прикладных задач в различных областях волновой физики: при проектировании систем радиосвязи, радиолокации и навигации, оптических фокусирующих систем, в лазерной физике, в рентгеновской литографии, в квантово-механической теории рассеяния, в теории термодинамических фазовых переходов, в теории устойчивости. Доступ к информационной системе организован через сайт <http://wavecat.rosnou.ru/>.

При решении задачи проектирования информационной системы [23], речь идет не о произвольном способе представления модели банка данных, а о конкретной реализации модели, ориентированной на определенные задачи и потребности пользователей. На этапе концептуального проектирования было выполнено моделирование информационных потребностей пользователей системы, интеграции информационных потребностей пользователей и проектировании концептуальной модели в рамках рассматриваемой предметной области. Предметная область охватила круг задач обработки информации, который осуществляется с помощью банка данных, в частности, хранение разнородной информации, моделей ее обработки и представления, обеспечение доступа к информации, хранящейся в базе данных.

Разрабатываемая информационная система использует для хранилища данных реляционную базу данных (БД), содержащую информацию различного типа: текстовое описание катастрофы, тип и индексы катастрофы, ее числовые характеристики (коранг, коразмерность и т.д.), текстовое описание катастрофы, графические представления наиболее изученных катастроф, а также математические формулы, описывающие структуры полей в критических областях [24-25]. Также в БД хранятся схемы подчиненных катастроф, массивы данных для организации графического вывода лучевой, каустической и амплитудно-фазовой структуры.

Для имитационного моделирования и выявления характерных черт, дающих представление о структуре катастрофы (амплитудно-фазовой структуре СВК), осуществляется графический вывод в динамическом режиме серии сечений, соответствующих повороту или смещению структуры в многомерном пространстве. Для вывода графической информации об амплитудно-фазовой, лучевой и каустической структуре полей сложных катастроф в базе данных хранятся данные, полученные в ходе предварительно выполненных расчетов. Для уменьшения объема хранимой информации в системе предусмотрены программные модули, которые должны обеспечить расчет и вывод разнородной информации в графическом и текстовом виде. Для редко используемых катастроф предусмотрено обращение к программам, производящим расчет и вывод структур в реальном времени [25, 26].

В качестве архитектуры информационной системы выбрана архитектура двухуровневого “клиент-сервера”. Клиентами выступают персональные компьютеры пользователей с установленным программным обеспечением — web-клиентами (браузерами). В качестве сервера выступает компьютер с установленным программным обеспечением: MS Windows (включая веб-сервисы Internet Information Server и необходимые серверные расширения — такие как ASP), MS SQL Server. На данном сервере также размещаются информационные массивы банка данных: базы данных, гипертекстовые страницы, другие документы.

Выбор платформы для проектирования веб-системы обусловлен наличием развернутой технической и программной поддержкой данной платформы, наличием стандартизированных решений. Платформа MS SQL Server обеспечивает масштабирование баз данных, интеграцию различных типов информационных данных, что позволяет поддерживать работу многих запросов на доступ к базе данных. Для обеспечения взаимодействия с Internet Information Services используются программные модули, обеспечивающие интерфейс с гипертекстовыми документами, расположенными на дисковых носителях сервера баз данных и доступ к информации через web-сервисы. При разработке информационной системы использовался подход, основанный на платформе веб-служб на базе языка XML и связанных с ним технологий. Язык расширенной разметки XML – универсальный, не зависящий от платформ стандарт, обеспечивающий технологии для гибких и стандартизированных решений проблем структурирования, хранения и обмена данными. К достоинствам применения языка XML относится возможность разделения информационного содержания электронных документов от процедур обработки информации и способов ее представления, расширяющая возможности при разработке веб-серверов и управлении контентом. Все запросы по извлечению и модификации данных (кроме тех, которые работают в специальных элементах управления, проверяющих вводимые данные) были инкапсулированы в хранимые процедуры, написанные на языке Transact-SQL.

Информационное хранилище системы в настоящее время состоит из четырех, связанных друг с другом разделов: основные катастрофы, краевые катастрофы, угловые катастрофы и обобщенные краевые катастрофы.

При создании интерфейса были использованы следующие возможности технологии ASP.NET, такие как:

- наследование интерфейса через эталонные страницы, для создания общего типового интерфейса для всего портала;
- формирование пользовательского интерфейса с помощью web-частей.

Эталонные страницы представляют собой, шаблон типового интерфейса, который может унаследовать любая страница разрабатываемого портала. Каждая эталонная страница, кроме своих собственных элементов управления, может выделять области, которые можно будет заполнить элементами управления в наследующих страницах.

Веб-части страниц – это элементы пользовательского интерфейса, позволяющие управлять содержимым текущей страницы для пользователей. Каждая веб-часть представляет собой законченный самостоятельный элемент управления, и пользователь им может полностью управлять. Их можно сворачивать, закрывать, перемещать между определёнными программистом зонами, редактировать отображение, динамически настраивать связи между разными веб-частями. Ниже на рисунках показаны примеры веб-интерфейса.

На рис. 1 представлена экранная форма вывода информации об основной катастрофе. На рис.2 и 3 в качестве примера представлены амплитудная и фазовая структуры первой производной СВК катастрофы A_5 .

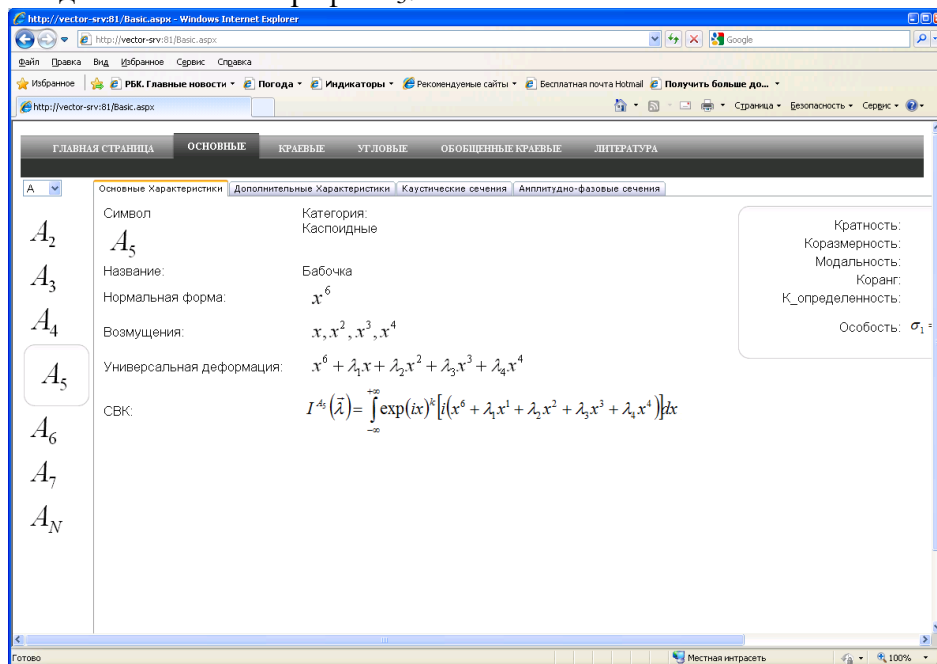


Рис. 1.

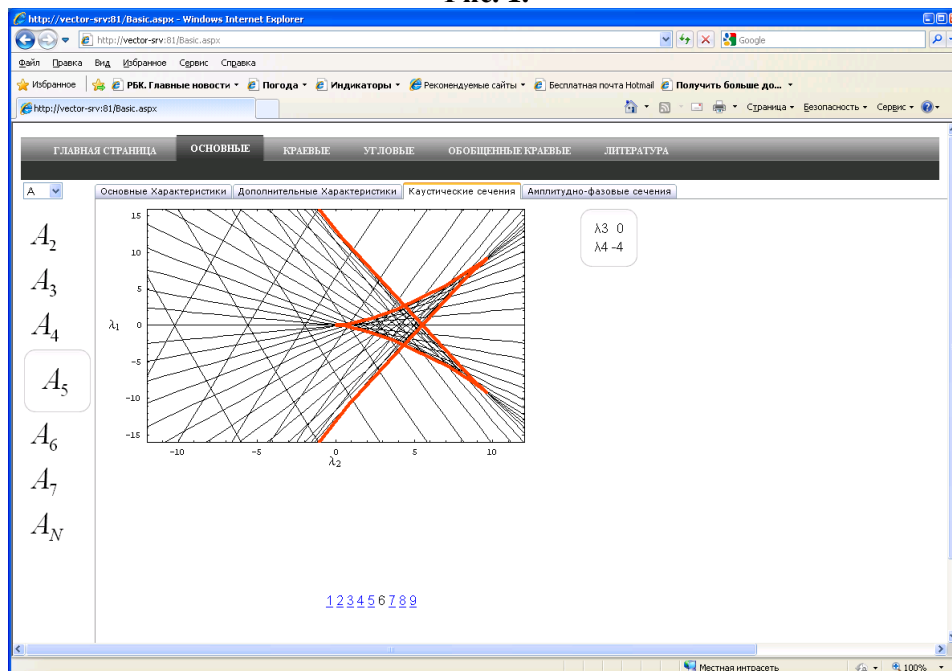


Рис. 2.

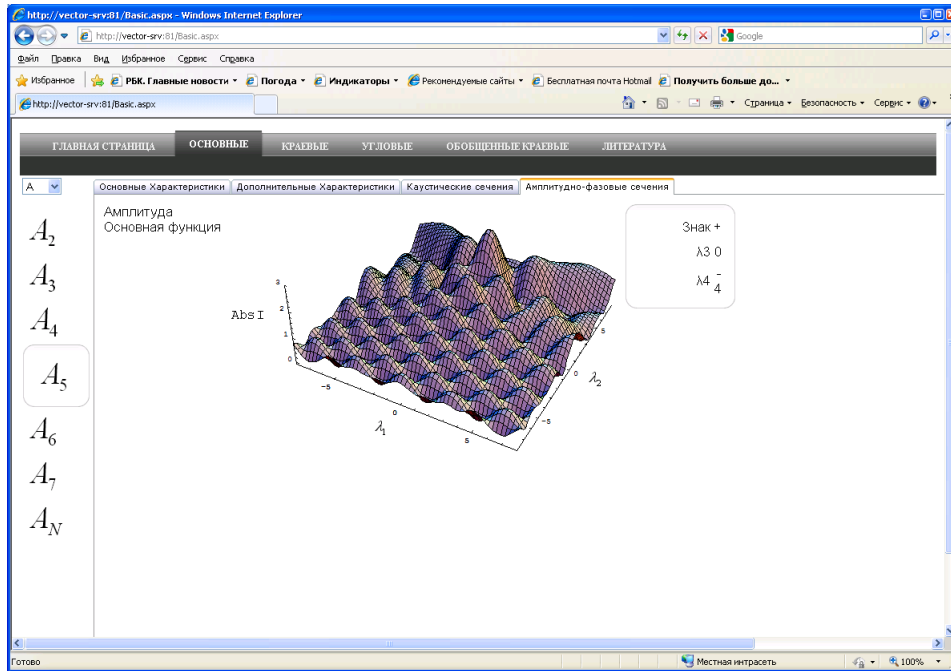


Рис. 3.

В рамках информационной системы имеется возможность моделировать переходы от одного сечения к другому, развитие структуры особенности, выделять появление катастроф более низкого порядка при распадении сложной волновой катастрофы. Например, на рис. 4 представлено одно из сечений сложной особенности J_{10} . Внизу имеется набор ссылок, обеспечивающих навигацию переходов между сечениями.

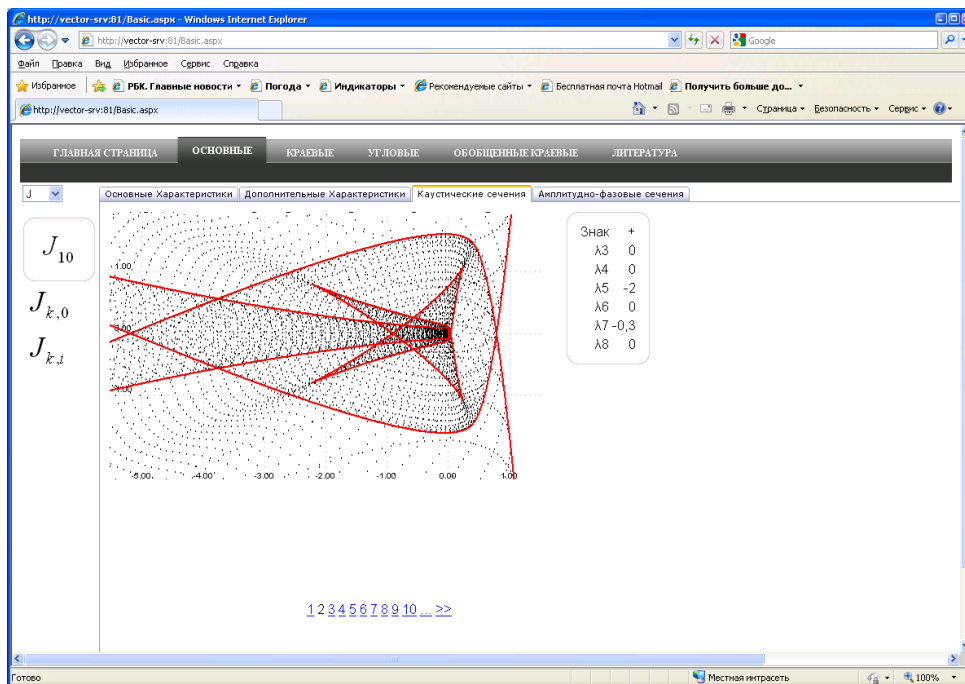


Рис. 4.

Информационная веб-система снабжена удобной навигационно-поисковой службой, позволяющей учащимся получать полную информацию о катастрофе по набору ее характеристик: с помощью индексов катастрофы, по лучевым и каустическим структурам. В систему также включен справочник, содержащий ссылки на литературу или другие дополнительные источники информации по данной катастрофе [27].

Литература

1. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф. М.: Мир, 1978. 608 с.
2. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. М.: Мир, 1984. Т.1. 350 с.; Т.2. 285 с.
3. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982. 304 с.
4. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. Классификация унимодальных и бимодальных угловых катастроф // Функциональный анализ и его приложения. 1992. Т.26. Вып.3. С.77-79.
5. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. Исследование устойчивых фокусировок, возникающих при нарушении симметрии волнового фронта. // Дифракция и распространение электромагнитных волн. Сб./ М.: МФТИ, 1993. С. 20-37.
6. Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. М.: МФТИ, 1982, 160 с.
7. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Краевые и угловые катастрофы в задачах дифракции и распространения волн. Казань: Каз. авиационный ин-т, 1988. 199 с.
8. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Построение равномерной геометрической теории дифракции методами краевых и угловых катастроф. // Радиотехника и электроника. 1998. Т. 43. № 9. С. 1044 - 1060.
9. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Краевые и угловые катастрофы в равномерной геометрической теории дифракции. М.: МФТИ, 1999. 134 с.
10. Крюковский А.С., Растягаев Д.В., Вергизаев И.А. Трехмерные пространственно-временные фокусировки волновых полей типа катастроф. // Радиотехника и электроника. 1999. Т. 44. № 4. С. 455 - 462.
11. Крюковский А.С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф. Монография. М.: РосНОУ, 2013.–368 с.
12. Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: МГУ, 1965. 553 с.
13. Лукин Д.С., Палкин Е.А. Применение канонического оператора Маслова для численного решения задач дифракции и распространения волн в неоднородных средах // Теоретическое и экспериментальное исследование распространения декаметровых радиоволн / М.: ИЗМИРАН СССР, 1976. С. 149 – 167.
14. Ипатов Е.Б., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Исследование дифракции сходящейся скалярной волны на проводящем экране. // Радиотехника и электроника. 1994. Т. 39 . № 4. С.538-547.
15. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е. А. Численное сравнение двух асимптотических методов решения задач дифракции волн в плавнонеоднородных средах // Изв. МВ и ССО СССР (Радиофизика). 1986. Т. 29. № 1. С. 79 - 88.
16. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Классификация и равномерное асимптотическое описание пространственно-временных трехмерных краевых фокусировок волновых полей типа катастроф. // Радиотехника и электроника, 2005. Т.50. №10. С. 1221-1230.
17. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Теория пространственной фокусировки видеоимпульсов в диспергирующих средах. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2007. Т.12. № 8. С.15-25.
18. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Применение теории катастроф для описания пространственно-временной структуры частотно-модулированного сигнала в плазме // Электромагнитные волны и электронные системы. 2013. Т. 18. № 8. С. 18-23.

19. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Волновые катастрофы – фокусировки в дифракции и распространении электромагнитных волн. // Радиотехника и электроника, 2006. Т.51. №10. С. 1155-1192.
20. Дорохина Т.В., Крюковский А.С., Растягаев Д.В. Мультимедийная информационная система «Волновые катастрофы в радиофизике, акустике и квантовой механике». // Труды VI Международного симпозиума «Интеллектуальные системы» (INTELS'2004), Россия, Саратов, СГТУ, 29.06-2.07.2004 г. / М.: РУСАКИ, 2004. С. 469-470.
21. Дорохина Т.В., Крюковский А.С., Растягаев Д.В. Мультимедийная информационная система «Волновые катастрофы в радиофизике, акустике и квантовой механике». // Вестник Российского нового университета. Выпуск 4. Серия «Естествознание, математика, информатика» / М.: РосНОУ, 2004. С. 83-86.
22. Дорохина Т.В., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Математическое моделирование волновых полей типа катастроф с помощью специализированной информационно-справочной системы. // Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи имени А.С. Попова. Серия: научная сессия, посвященная Дню Радио 17-18.05.2006 г. . Выпуск: LXI. /М.: РНТОРЭС, 2006. С.287-289.
23. Дорохина Т.В., Крюковский А.С., Растягаев Д.В. Принципы разработки мультимедийной информационной системы «Волновые катастрофы в радиофизике, акустике и квантовой механике». // Россия: перспективы прорыва в цивилизацию знаний. Информационные системы и компьютерные технологии. Тезисы докл. V Межвузовской научной конференции Российского нового университета, 16-17.04.2004 г. / М.: РосНОУ, 2004. С. 291-293.
24. Дорохина Т.В., Крюковский А.С., Лукин Д.С. Информационная система «волновые катастрофы в радиофизике, акустике и квантовой механике». // Электромагнитные волны и электронные системы. 2007. Т.12. № 8. С.71-75.
25. Дорохина Т.В., Крюковский А.С., Малышенко А.Б. Разработка численных алгоритмов расчета и визуализации волновых катастроф. // Вестник Российского нового университета. Серия «Управление, вычислительная техника и информатика» / М.: РосНОУ, 2008. Выпуск 3. С. 25-48.
26. Дорохина Т.В., Ипатов Е.Б., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Математическое компьютерное моделирование волновых полей типа катастроф. // Распространение радиоволн: сборник докладов XXI Всероссийской научной конференции. Йошкар-Ола, 25-27 мая 2005 г. /Йошкар-Ола: МарГТУ, 2005. Т.2. С. 336-339.
27. Дорохина Т.В., Крюковский А.С., Растягаев Д.В. Информационные технологии представления катастроф в волновой физике. // Материалы XV межрегиональной научно-технической конференции «Обработка сигналов в системах наземной радиосвязи и оповещения» Московского и Нижегородского отделений НТОРЭС им. А.С.Попова. Н.-Новгород. Октябрь 2007 г. / Н.-Новгород–Москва: НТОРЭС, 2007. С. 329-331.