

Методы построения асимптотических решений в области каспидной фокусировки типа A_3

А.С. Крюковский, В.И. Маслянкин, Р.К. Хусамов

Автономная некоммерческая организация высшего образования «Российский новый университет», 105005, г. Москва, ул. Радио, д. 22, e-mail: rinat.khusamov@gmail.com

Рассмотрена каспидная фокусировка типа A_3 , образованная параболическим волновым фронтом. Сопоставлены методы определения параметров универсальной деформации особенности – метода глобальной асимптотики (или метод седловых точек) и первое приближение метода локальной асимптотики. Построены амплитудная и фазовая структуры волнового поля в окрестности особенности.

The cuspid focusing such as A_3 , formed by parabolic wave front is considered. The methods of definition of parameters of universal deformation of a singularity - method of a global asymptotic (or a saddle point method) and first approximation of a local asymptotic method are compared. Amplitude and phase structure of a wave field in a vicinity of a singularity are constructed.

В настоящей работе в соответствии с волновой теорией катастроф [1-6] исследована фокусировка, образованная параболическим волновым фронтом методом локальной асимптотики и выполнено математическое моделирование амплитудной и фазовой структуры волнового поля в окрестности особенности.

На рис.1 представлена лучевая структура (тонкие линии), их огибающая – каустика (толстая линия) и волновой параболический (штриховая линия), описываемый формулой (1) с $a=2$. Волна падает сверху вниз вдоль лучевых траекторий, перпендикулярных к волновому фронту из затенённой области.

$$f(\xi) = -\frac{1}{2} a \xi^2 \quad (1)$$

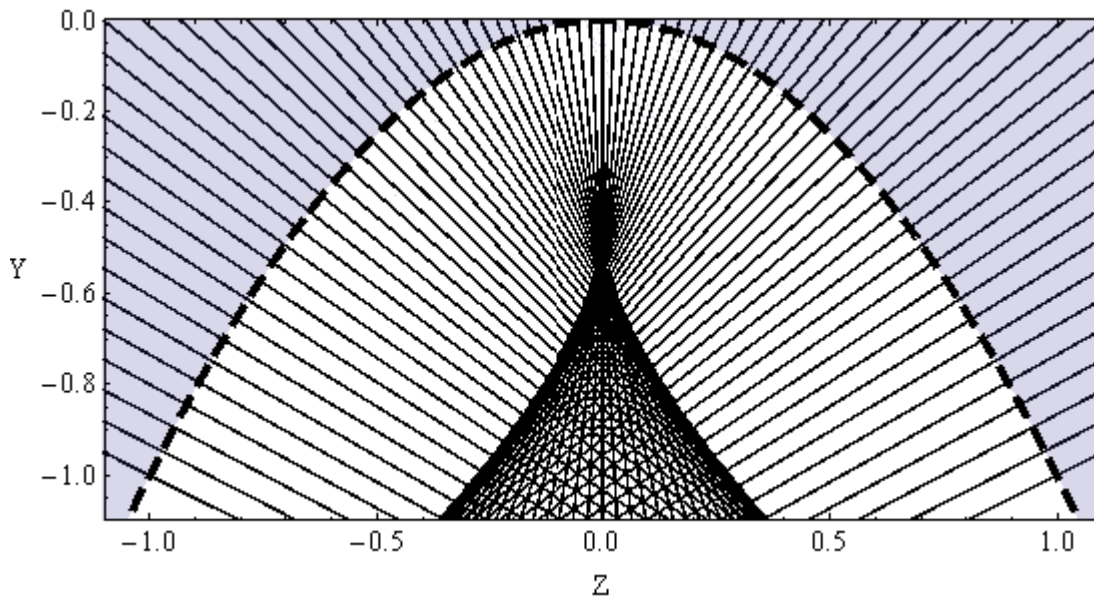


Рис. 1. Лучевая структура, каустика и волновой фронт

В формуле (1) координата ξ волнового фронта соответствует Z , а координата $f(\xi)$ – координате Y .

Расстояние между точкой волнового фронта и точкой наблюдения (Z, Y) определяется формулой:

$$R = \sqrt{(Y - f(\xi))^2 + (Z - \xi)^2} \quad (2)$$

В соответствии с принципом Ферма (принципом наименьшего действия) уравнение лучевой траектории определяется нулем первой производной функции (2) по ξ :

$$\frac{\partial R}{\partial \xi} = \frac{(f(\xi) - Y)f'(\xi) + \xi - Z}{R} = 0. \quad (3)$$

Для того чтобы найти положение каустики необходимо дополнить уравнение (3) нулем второй производной функции (2) по ξ . С учетом выполнения уравнения (3), получаем:

$$(f'(\xi))^2 + (f(\xi) - Y)f''(\xi) + 1 = 0. \quad (4)$$

Учитывая (1), находим, что уравнение каустики в параметрической форме имеет вид:

$$\begin{cases} Y = -\frac{1}{a} - \frac{3}{2}a\xi^2 \\ Z = -a^2\xi^3 \end{cases} \quad (5)$$

или в неявной форме:

$$Z^2 = -\frac{8}{27}a\left(Y + \frac{1}{a}\right)^3, \quad (6)$$

что очевидно полукубическая парабола. Точка, в которой сливаются ветви каустик, называется каустическим остриём и соответствует каспоидной катастрофе A_3 , в то время как сами ветви каустики – катастрофе A_2 . Каустическое острие в данной задаче образуется в точке с координатами $(Z_c=0, Y_c=-1/a)$, а в случае $a=2$ в точке с координатами $(Z_c=0, Y_c=-1/2)$, что соответствует рис. 1.

Волновое поле в скалярном приближении Кирхгофа имеет вид:

$$U(Z, Y) \cong \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{k} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi) \sqrt{\frac{1 + (f'(\xi))^2}{R}} \exp(ikR) d\xi, \quad (7)$$

где $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ — волновое число,

ω — частота,

$c=3 \times 10^8$ м/с — скорость света,

λ — длина волны.

Далее будем считать, что $A=1$, а величины (Z, Y) — координаты точки наблюдения.

Интересно отметить, что если бы фокусировка была идеальной, то есть все лучи сходились бы в одну точку, то в этой точке интенсивность поля была бы бесконечно большой (в случае бесконечного волнового фронта), что явно не имело бы физического смысла. Однако для каспоидных фокусировок (и вообще для катастроф с конечной определенностью) это не так. Причем края волнового фронта при достаточно большом удалении от центрального фокуса вообще мало влияют для значения поля нём.

Проблема построения асимптотических решений является сложной задачей [7,8]. Согласно волновой теории катастроф (см., например, [1, 9]) в окрестности каустического острия поле представимо в виде функции Пирси и её производных:

$$U_p \cong \exp[i\theta] \left[l_1 I(\lambda_1, \lambda_2) + l_2 \frac{\partial I(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} + l_3 \frac{\partial I(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2} \right], \quad (8)$$

где

$$I(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i(s^4 + \lambda_2 s^2 + \lambda_1 s)] ds \quad (9)$$

функция Пирси [10]. Для того чтобы перейти от интеграла (7) к разложению (8) воспользуемся методом локальной асимптотики (ЛА) [9,11-13]. Локальная связь аргументов функции Пирси λ_1 , λ_2 и фазы бегущей волны θ с пространственными координатами Z , Y и имеет вид:

$$\lambda_1 \approx \gamma_{1Z}(Z - Z_c) + \gamma_{1Y}(Y - Y_c), \quad (10)$$

$$\lambda_2 \approx \gamma_{2Z}(Z - Z_c) + \gamma_{2Y}(Y - Y_c), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \theta \approx \varphi|_c + \frac{\partial \varphi}{\partial Z}(Z - Z_c) + \frac{\partial \varphi}{\partial Y}(Y - Y_c) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2}(Y - Y_c)^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Z^2}(Z - Z_c)^2 \right) + \\ + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y \partial Z}(Y - Y_c)(Z - Z_c) + \Delta \times \Delta_\rho \times \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial Y}(Y - Y_c) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial Z}(Z - Z_c) \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где [10]

$$\varphi = k R, \quad \Delta_\rho = \rho_Y(Y - Y_c) + \rho_Z(Z - Z_c), \quad (13)$$

$$\rho_h = - \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial \xi^4} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial \xi^3 \partial h} + 3 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \xi^2 \partial h} T_2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial h} T_3 \right), h = Z, Y. \quad (14)$$

В формулах (10)–(14) координаты (Z_c, Y_c) – это пространственные координаты геометрического центра каустического острия. Все производные вычислены в этой точке. Выражения для коэффициентов $\gamma_{i,j}$ были получены в работе [9] (см. также [11-16]). Они имеют вид:

$$\gamma_{1Z} = \nu_k \Delta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial Z}, \quad \gamma_{1Y} = \nu_k \Delta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial Y}, \quad (15)$$

$$\gamma_{2Z} = \frac{\nu_k}{2} \Delta^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial Z} T_2 + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \xi^2 \partial Z} \right), \quad (16)$$

$$\gamma_{2Y} = \frac{\nu_k}{2} \Delta^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial Y} T_2 + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \xi^2 \partial Y} \right), \quad (17)$$

где в случае каустического острия:

$$\begin{aligned} \Delta = \left(\frac{24}{|\varphi_{\xi\xi\xi\xi}^{(4)}|} \right)^{1/4}, \quad T_2 = - \frac{1}{10} \frac{\varphi_{\xi\xi\xi\xi\xi}^{(5)}}{\varphi_{\xi\xi\xi\xi}^{(4)}}, \\ T_3 = \frac{1}{20} \left(\frac{21}{20} \left(\frac{\varphi_{\xi\xi\xi\xi\xi}^{(5)}}{\varphi_{\xi\xi\xi\xi}^{(4)}} \right)^2 - \frac{\varphi_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi}^{(6)}}{\varphi_{\xi\xi\xi\xi}^{(4)}} \right), \quad \nu_k = \text{sign}(\varphi_{\xi\xi\xi\xi}^{(4)}) \end{aligned} \quad (18)$$

На рис 2-7 коэффициенты подобия (аргументы функции Пирси) λ_1 , λ_2 и фаза бегущей волны θ , вычисленные методом локальной асимптотики, сопоставлены с результатами, полученными методом глобальной асимптотики (ГА) [17, 18], то есть методом седловых точек. Выражения для λ_1 , λ_2 и фазы θ (см., например, [9]) имеют вид:

$$\lambda_2^2 = 4 \tilde{\Sigma}^{1/2} \left(\text{sign} \Pi(1 - \phi)^{1/2} + \left(2 + \phi + 2(1 + \phi + \phi^2)^{1/2} \right)^{1/2} \right), \quad (19)$$

$$\lambda_1 = \pm \sqrt{2} \left(\frac{\lambda_2^4 - 144 \tilde{\Sigma}}{54 \lambda_2} \right)^{1/2}, \quad \theta = \frac{\lambda_2^2}{6} + k R_s \quad (20)$$

где

$$\tilde{\Sigma} = -\frac{1}{3}k^2 \left(\dot{R}_{(1)} \dot{R}_{(2)} + \dot{R}_{(2)} \dot{R}_{(3)} + \dot{R}_{(3)} \dot{R}_{(1)} \right) \quad \Pi = k^3 \dot{R}_{(1)} \dot{R}_{(2)} \dot{R}_{(3)}, \quad (21)$$

$$\phi = \left(1 - \frac{1}{4} \Pi^2 \tilde{\Sigma}^{-3} \right)^{1/3}, \quad \dot{R}_{(j)} = R_{(j)} - R_s, \quad R_s = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 R_{(j)}. \quad (22)$$

Значения $R_{(j)}$ это значения функции (2) в седловых точках, то есть при тех значениях ξ , которые являются решениями уравнения (3). Внутри каустического острия таких действительных решений три, и именно эту область мы будем рассматривать ниже при сопоставлении с локальной асимптотикой.

На рис 2 и 3 показаны линии равного уровня фазы бегущей волны θ .

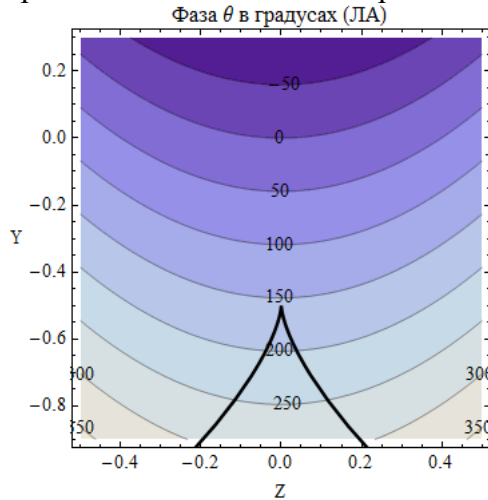


Рис. 2.

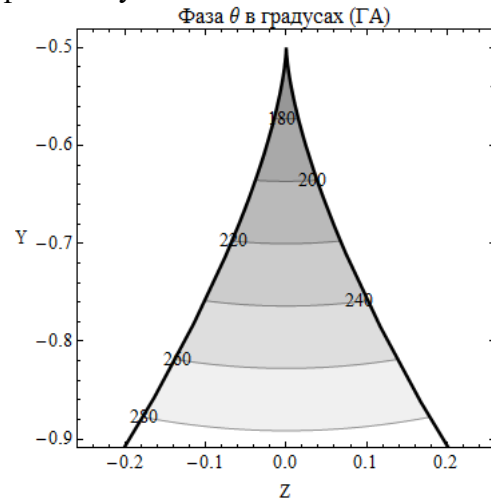


Рис. 3.

Линии равного уровня фазы бегущей волны, метод ЛА – рис. 2, метод ГА – рис. 3

Видно, что линии уровня имеют кривизну, центр которой находится в верхней части рисунка. На небольших расстояниях от центральной точки линии почти прямые (см. рис. 3). Поскольку при построении локальных выражений для фазы использовались квадратичные поправки, совпадение результатов, полученных методами локальной и глобальной асимптотики, очень хорошее.

На рис 4 и 5 показаны линии равного уровня аргумента λ_1 . На рис. 4 линии уровня параллельны вертикальной оси. При вычислении аргумента использовалось только первое, линейное приближение. Поэтому небольшая кривизна линий равного уровня, заметная на рис. 5 (нижняя часть), отсутствует на рис. 4.

На рис 6 и 7 показаны линии равного уровня аргумента λ_2 . На рис. 6 линии уровня параллельны горизонтальной оси. Сопоставляя рис. 6 и рис. 7 видим, что кривизна линий уровня на рис. 7 заметна, что наводит на мысль о необходимости учета второго приближения. Отметим, что при увеличении параметра k (волнового числа) все большее число осцилляций втягивается в область, хорошо описываемую первым приближением.

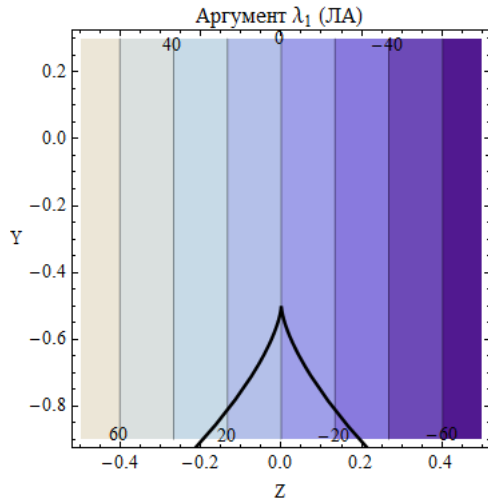


Рис. 4.

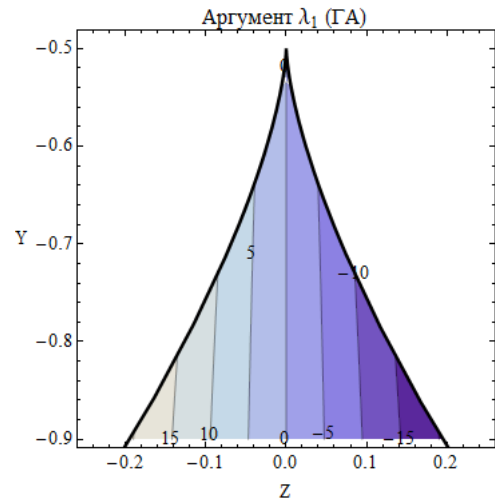


Рис. 5.

Линии равного уровня аргумента λ_1 , метод ЛА – рис. 4, метод ГА – рис. 5

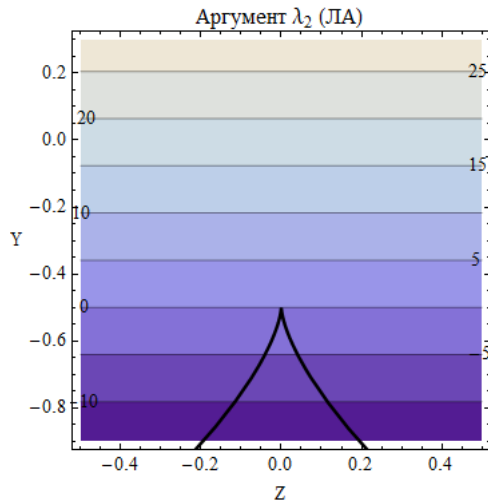


Рис. 6.

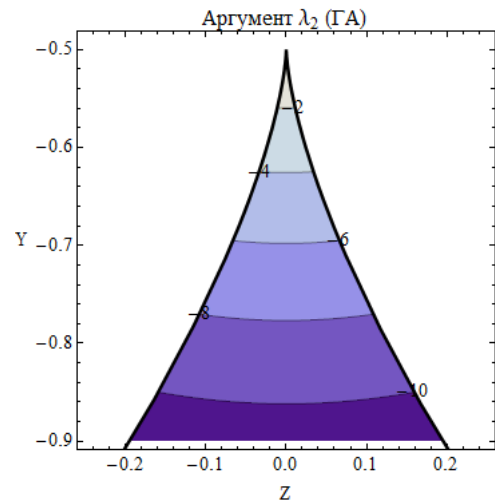


Рис. 7.

Линии равного уровня аргумента λ_2 , метод ЛА – рис. 6, метод ГА – рис. 7.

Локальные выражения для коэффициентов асимптотических разложений имеют вид:

$$l_1 \approx \Delta B|_{\xi=0}, \quad l_2 \approx -i \Delta^2 v_k \left(\frac{\partial B}{\partial \xi} + B \times T_2 \right)_{\xi=0},$$

$$l_3 \approx -\frac{i}{2} \Delta^3 v_k \left(\frac{\partial^2 B}{\partial \xi^2} + 3 \frac{\partial B}{\partial \xi} T_2 + B \times T_3 \right)_{\xi=0}, \quad (23)$$

где

$$B = \sqrt{k} \exp[-i\pi/4] \sqrt{\frac{1 + (f'(\xi))^2}{2\pi R}}. \quad (24)$$

Для расчета функции Пирси и её производных использован метод поворота контура интегрирования [19]. Для этого функция Пирси и её производные представлялись в виде:

$$I(\lambda_1, \lambda_2) = \int_0^{+\infty} \exp[i(s^4 + \lambda_2 s^2 + \lambda_1 s)] ds + \int_0^{+\infty} \exp[i(s^4 + \lambda_2 s^2 - \lambda_1 s)] ds, \quad (25)$$

$$\frac{\partial I(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} = \int_0^{+\infty} is \exp[i(s^4 + \lambda_2 s^2 + \lambda_1 s)] ds - \int_0^{+\infty} is \exp[i(s^4 + \lambda_2 s^2 - \lambda_1 s)] ds, \quad (26)$$

$$\frac{\partial I(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2} = \int_0^{+\infty} is^2 \exp[i(s^4 + \lambda_2 s^2 + \lambda_1 s)] ds + \int_0^{+\infty} is^2 \exp[i(s^4 + \lambda_2 s^2 - \lambda_1 s)] ds \quad (27)$$

и внутренняя переменная интеграла s заменялась выражением $s \exp[i\pi/18]$ для линий равного уровня и на $s \exp[i\pi/38]$ для 3D изображения. Уменьшение угла поворота контура интегрирования, увеличивая точность, расширяет диапазон параметров, при которых интегралы сходятся, но увеличивает время вычислений.

Результаты вычислений представлены на рис. 8-11 (длина волны $\lambda=0,02$). На рис. 8-10 показана амплитуда, а на рис. 11 фаза.

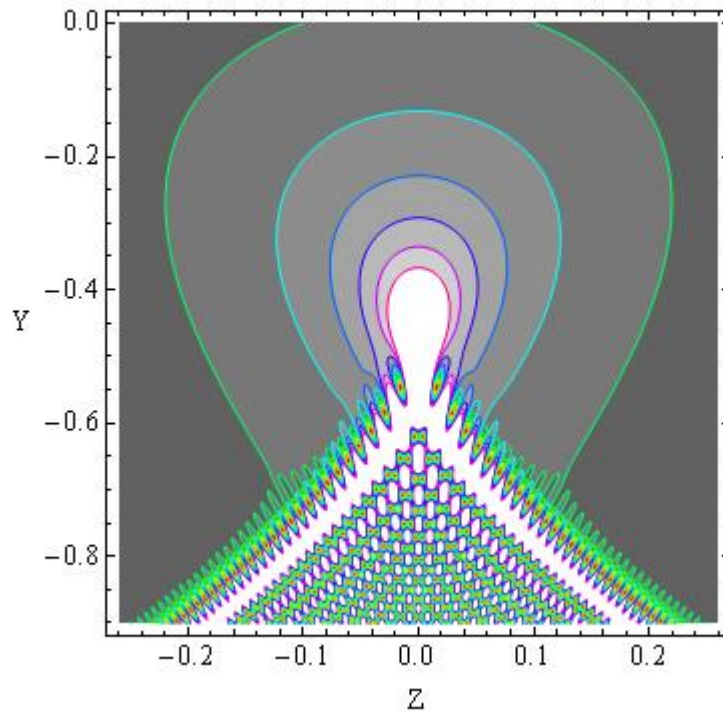


Рис. 8. Линии равного уровня амплитуды волнового поля

Амплитудная структура характеризуется центральным фокальным пятном, соответствующим точке слияния ветвей каустики, и мелкой интерференционной структурой внутри ветвей. Линии максимумов и минимумов повторяют направления ветвей каустик. Линии равного уровня фазы волнового фронта (рис. 11) являются суммой фазы бегущей волны (рис. 2 и 3) и фазы функции Пирси и её производных (рис. 12), что приводит к характерной ряби на линиях равных уровней.

Таким образом, в работе исследованы методы построения асимптотических решений в области фокусировки каспоидного типа. Сопоставлены методы получения коэффициентов подобия: метод локальной асимптотики и метод глобальной асимптотики и построены амплитудная и фазовая структуры. Такие особенности возникают в различных оптических и радиофизических задачах, например, при математическом моделировании распространения радиоволн в анизотропной неоднородной ионосфере Земли [20-22].

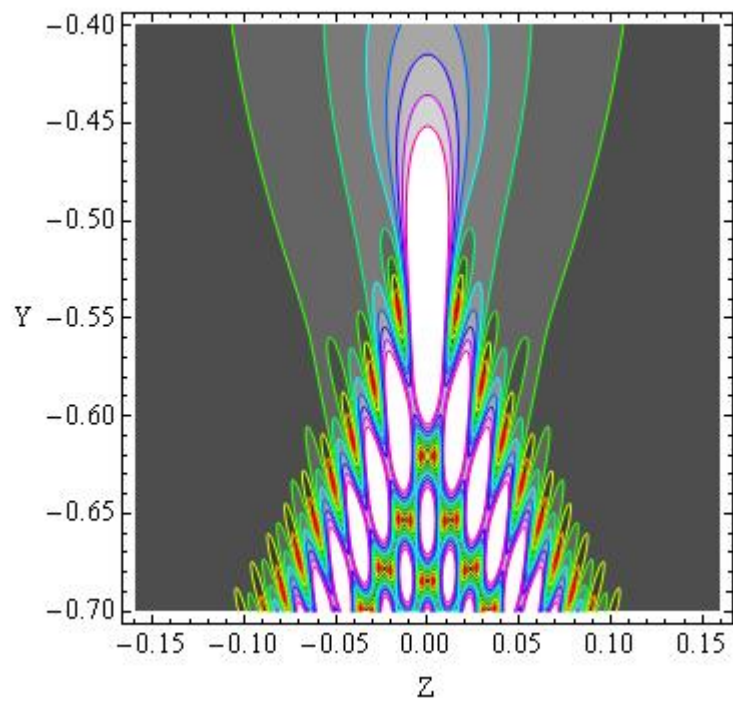


Рис. 9. Линии равного уровня амплитуды волнового поля (фрагмент рис. 8)

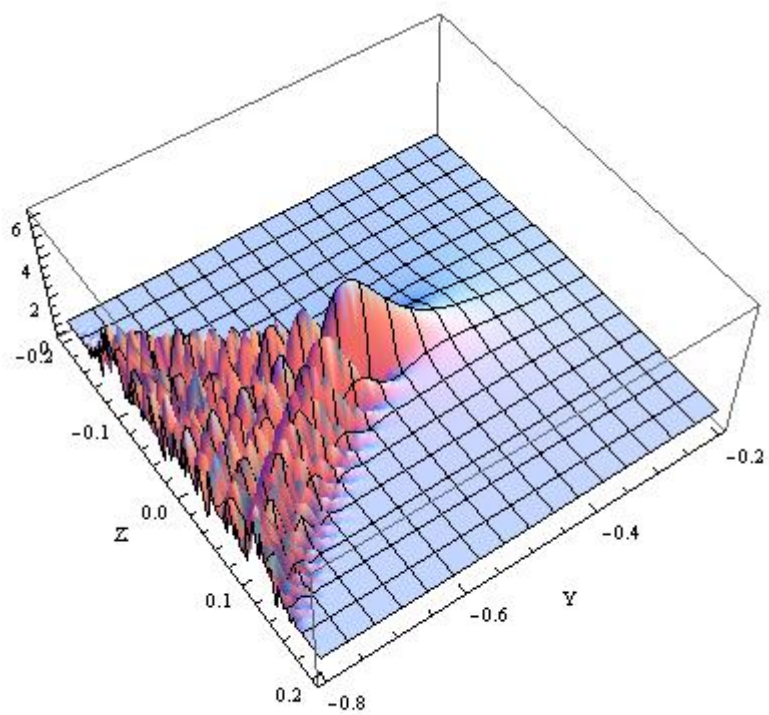


Рис. 10. 3D изображение амплитуды волнового поля

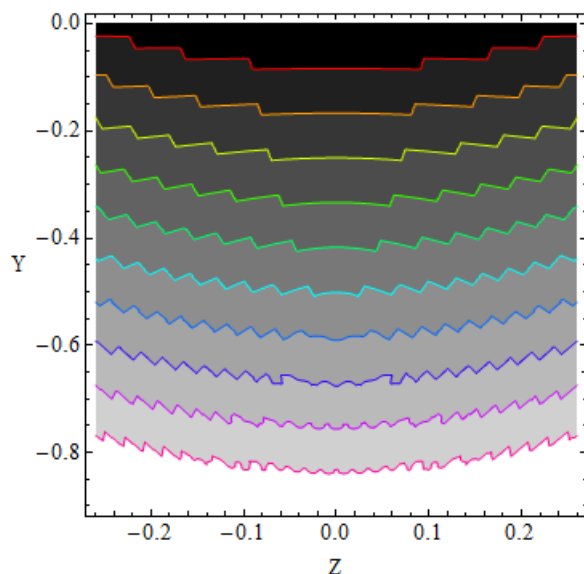


Рис. 11.

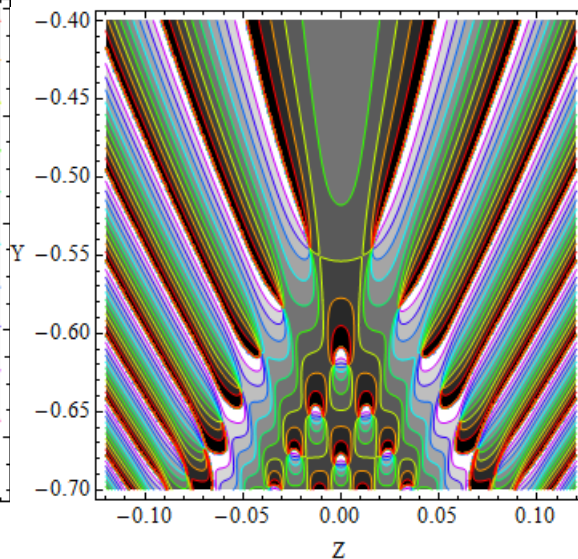


Рис. 12.

Линии равного уровня фазы волнового поля – рис. 11, без учета фазы бегущей волны – рис 12

Литература

1. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Волновые катастрофы – фокусировки в дифракции и распространении электромагнитных волн. // Радиотехника и электроника, 2006. Т.51. №10. С. 1155-1192.
2. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Теория пространственной фокусировки видеоимпульсов в диспергирующих средах. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2007. Т.12. № 8. С.15-25.
3. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. О необходимых и достаточных условиях образования каспидных катастроф. // Распространение и дифракция волн в неоднородных средах. Сб./ М.: МФТИ 1989. С.56-60.
4. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. Исследование устойчивых фокусировок, возникающих при нарушении симметрии волнового фронта. // Дифракция и распространение электромагнитных волн. Сб./ М.: МФТИ, 1993. С.20-37.
5. Крюковский А.С., Зайчиков И.В. Особенности распространения радиоимпульсов в средах с дисперсией. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2008. Т.13. № 8. С. 36-41.
6. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Применение теории катастроф для описания пространственно-временной структуры частотно-модулированного сигнала в плазме // Электромагнитные волны и электронные системы. 2013. Т. 18. № 8. С. 18-23.
7. Крюковский А.С. К вопросу об асимптотически сходящихся рядах // Вестник Российского нового университета. Серия: Сложные системы: модели, анализ и управление. 2016. Выпуск 3. / М.: РосНОУ, 2016. С. 15 - 18.
8. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е. А. Численное сравнение двух асимптотических методов решения задач дифракции волн в плавнеоднородных средах // Изв. МВ и ССО СССР (Радиофизика). 1986. Т. 29. № 1. С. 79 - 88.
9. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Равномерные асимптотики интегралов от быстро осциллирующих функций с вырожденными седловыми точками: Препринт / ИРЭ АН СССР. М., 1984. 41 (413). 75 с.
10. Pearcey T. The structure of an electromagnetic field in the neighborhood of a cusp of a caustic // Philos. Mag., 1946. V. 37. P. 311 – 317.

11. Крюковский А.С. Локальные равномерные асимптотики волновых полей в окрестности основных и краевых каспоидных каустик. // Радиотехника и электроника. 1996. Т.41. № 1. С. 59-65.
12. Крюковский А.С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф. Монография. М.: РосНОУ, 2013. С. 132 - 141.
13. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Локальная асимптотика быстроосциллирующих интегралов, описывающих волновое поле в областях фокусировки // Дифракция и распространение электромагнитных волн: Междувед. сб. / МФТИ. М., 1984. С. 39 - 53.
14. Балыкина А.М., Крюковский А.С. Математическое моделирование дифракционных полутеневых полей каспоидного типа. //Вестник Российского нового университета. 2007. Выпуск 2. / М.: РосНОУ, 2007. С. 61-64.
15. Крюковский А. С., Лукин Д. С. Локальное асимптотическое описание электромагнитного поля в окрестности каустического острия в плоско-слоистой среде. // Вопросы дифракции электромагнитных волн. Межвед. сборник / МФТИ. М., 1982. С. 40 - 45.
16. Крюковский А.С., Лукин Д.С. К вопросу о поле в окрестности каустического острия в ионосферном плазменном слое. // Радиотехника и электроника, 1981. Т. 26. № 6. С. 1121 - 1126.
17. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Краевые и угловые катастрофы в задачах дифракции и распространения волн. Казань: Каз. авиационный ин-т, 1988. 199 с.
18. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Краевые и угловые катастрофы в равномерной геометрической теории дифракции. Учебное пособие. М.: МФТИ, 1999. 134 с.
19. Лукин Д.С., Ипатов Е.Б., Палкин Е.А. Алгоритм численного расчета специальных функций типа быстро осциллирующих интегралов. // Вопросы дифракции электромагнитных волн. Межвед. сборник / МФТИ. М., 1982. С. 21 - 35.
20. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Математическое моделирование распространения радиоволн в анизотропной неоднородной ионосфере. //Вестник Российского нового университета. Серия «Управление, вычислительная техника и информатика» / М.: РосНОУ, 2009. Выпуск 2. С. 7-14.
21. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Математическое моделирование распространения радиоволн в нестационарной плазме с учетом кривизны поверхности Земли и ионосферных слоев // Вестник Российского нового университета. Серия: Сложные системы: модели, анализ и управление. 2016. № 1-2. С. 34-40.
22. Андреева Е.С., Крюковский А.С., Куницын В.Е., Лукин Д.С., Растягаев Д.В., Кирьянова К.С. Моделирование лучевой и каустической структуры электромагнитных полей по данным радиотомографии ионосферы в окрестности экваториальной аномалии. // «Распространение радиоволн», сб.докл. XXIII Всероссийской научной конференции. (23–26 мая 2011; Йошкар-Ола) /Йошкар-Ола: Марийский государственный технический университет, 2011. Т.3 С. 288-291.