

Расчет коэффициентов отражения и прохождения плоской волны для параболического ионосферного слоя на основе асимптотики точного решения.

Е.А. Палкин, А.А. Петрович

Российский новый университет (РосНОУ), г. Москва, ул. Радио, д.22;
Московский физико-технический институт (ГУ МФТИ), г.Долгопрудный М.О.,
Институтский пер., д.9; palkin@rosnou.ru; aaetrovich@bk.ru

Предложены формулы для коэффициентов прохождения и отражения плоской волны в полупрозрачном параболическом ионосферном слое, справедливые как для отражающего (в приближении геометрической оптики) слоя, так и для прозрачного (в том же приближении) слоя. Данные формулы получены на основе асимптотических разложений точного решения модельной задачи и учитывают как эффекты подбарьерного просачивания, так и эффекты надбарьерного отражения. Дана интерпретация результатов с позиции геометрической теории дифракции.

The plane wave transmission and the reflection coefficients expressions are proposed for semitransparent parabolic ionospheric layer, valid as for reflective (in geometrical optics approximation) layer, so as for transparent (in the same approximation) layer. These formulas are obtained on the basis of asymptotic expansions of the exact solution for the model problem and take into account both the effects of sub-barrier seepage and the effects of over-barrier reflection. The interpretation of the results in the frame of the geometric theory of diffraction is given.

Модельная задача о падении плоской волны на неоднородный слой холодной плазмы с параболическим законом распределения плотности электронов сводится к решению одномерного уравнения Гельмгольца с переменными коэффициентами внутри слоя:

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi_x(x) + k^2 (\cos^2 \theta - \beta(a^2 - x^2)) * \psi_x(x) = 0 \quad (1)$$
$$x \in [-a, +a]$$

и такого же уравнения с постоянными коэффициентами вне слоя:

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi_x(x) + k^2 \cos^2 \theta * \psi_x(x) = 0 \quad (2)$$
$$x \notin [-a, +a]$$

Здесь $2a$ – «толщина» (параметр масштаба) параболического слоя, β – его «плотность», θ – угол падения плоской волны, k – волновое число (большой параметр). В качестве одного из граничных условий выбирается условие падения на слой плоской волны единичной амплитуды под углом θ из области $x < -a$ (Рис.1). Полное решение в двумерном пространстве $\{x, y\}$ имеет вид:

$$\psi(x, y) = \psi_x(x) * \exp(iky * \sin \theta). \quad (3)$$

Задачи о прохождении волн через потенциальный барьер неоднократно исследовались разными авторами (см., например, [1, 2]). Однако, необходимость в вычислениях коэффициентов «возбуждения» дифракционных волн, интерпретируемых как эффекты надбарьерного отражения и подбарьерного просачивания при всех возможных уровнях параболического барьера, и «привязка» их к семействам вторичных дифракционных лучей, связанных с указанными эффектами, не рассматривались. В квантовой механике данные эффекты обычно рассчитываются в квазиклассическом приближении, или в рамках простых моделей, допускающих точное

решение, но без анализа его асимптотических представлений, необходимых для разделения разных типов волн, что не позволяет проследить переход от одного эффекта к другому. В радиофизических задачах данные вопросы также рассматриваются, как правило, на качественном уровне (см., например, [3]).

В данной работе мы приводим вывод формул для коэффициентов отражения и прохождения плоской волны, падающей на неоднородный слой с параболическим законом зависимости показателя преломления от переменной x :

$$n^2(x) = 1 - \beta * (a^2 - x^2), \quad x \in [-a, +a] \quad (4)$$

используя асимптотики точного решения уравнения вида (1), полученные в [4].

Точное решение уравнения (1) для комплексной амплитуды $\psi_x(x)$ представляется через функции параболического цилиндра (функции Вебера-Эрмита) в виде суперпозиции двух линейно независимых решений:

$$\psi_x(x) = C_+ \psi_+(x) + C_- \psi_-(x), \quad (5)$$

где (см., например, [5]):

$$\psi_{\pm}(x) = \exp\left(\frac{i}{2} k x^2 \sqrt{\beta}\right) * \int_{\gamma^{\pm}} \exp\left\{ik \left(\frac{1}{4\sqrt{\beta}} p^2 + px\right)\right\} * p^{k \frac{(\cos^2 \theta - \beta a^2)}{2i\sqrt{\beta}}} * p^{-1/2} dp, \quad (6)$$

или, используя интегральное представление функций параболического цилиндра [6]:

$$\psi_{\pm}(x) = \sqrt{2}\beta^{1/8} \exp\left(ik \left(\frac{1}{2} x^2 \sqrt{\beta} + \nu \ln(2\beta^{1/4})\right)\right) * D_{\nu,k}^{\pm}(X), \quad (7)$$

$$D_{\nu,k}^{\pm}(X) = \int_{\gamma^{\pm}} \exp\{ik(t^2 + tX + \nu \ln t)\} * t^{-1/2} dt. \quad (8)$$

Контуры γ^{\pm} проходят в комплексной плоскости переменной t (или p) из ∞ в третьем квадранте и уходят на ∞ в первом квадранте, огибая, соответственно, сверху (γ^+) или снизу (γ^-) начало координат. Приведенные в (7,8) параметры функций параболического цилиндра связаны с переменными модельной задачи следующими соотношениями:

$$X = 2\beta^{1/4} x; \quad \nu = \left(\frac{\beta a^2 - \cos^2 \theta}{2\sqrt{\beta}}\right), \quad k \gg 1. \quad (9)$$

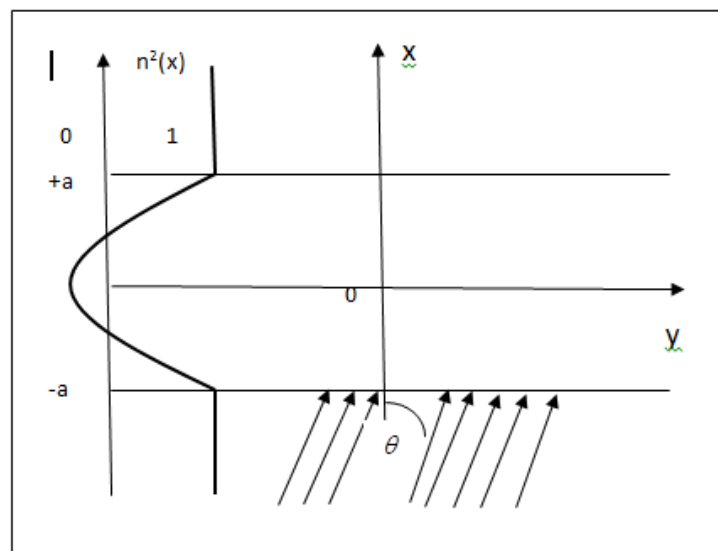


Рис. 1. Геометрия задачи.

1. «Отражающий» слой ($v \geq C_v > 0$).

Данная ситуация соответствует случаю, когда в плазменном слое имеется область отрицательных значений для приведенного показателя преломления

$$\tilde{n}^2(x) = \text{Cos}^2\theta - \beta * (a^2 - x^2) \quad (10)$$

и слой считается отражающим, непрозрачным (Рис. 2). Основное поле волны сосредоточено в области под слоем, ниже уровня отражения, определенного условием:

$$x_d = -x_0, \quad \text{где} \quad x_0 = \sqrt{a^2 - \frac{\text{Cos}^2\theta}{\beta}}, \quad (11)$$

и его структура соответствует интерференции подающей и отраженной волн. Выше слоя, начиная с уровня $x_u = +x_0$, формируется поле волны «просачивания», причем соответствующее этому полю семейство геометрооптических лучей имеет каустику симметричную каустике семейства подающих снизу и отраженных лучей (см. Рис. 2). Но отличие в структуре верхних и нижних лучевых семейств проявляется и в виде асимптотических представлений решений в окрестности каустик. Для нижней каустики решение представимо через функцию Эйри, а для верхней – через вторую функцию Эйри [7]. В областях ниже и выше указанных каустик можно использовать неравномерные асимптотические представления решения, которые позволяют выделить квазиплоские волны и сопоставить их с условием падения плоской волны на слой.

Именно, в области ниже уровня отражения ($x < x_d$), в частности, на уровне $x = -a$:

$$\psi_x(x) = e^{ik\varphi_0} * \beta^{1/8} \sqrt{\frac{\pi}{k}} * \left(C_+ e^{i\frac{\pi}{4}} * e^{ik\varphi_1^+} + C_+ e^{-i\frac{\pi}{4}} * e^{ik\varphi_2^+} + C_- e^{-i\frac{\pi}{4}} * e^{ik\varphi_1^-} * e^{-\frac{k\pi}{2\sqrt{\beta}}(\beta a^2 - \text{Cos}^2\theta)} \right), \quad (12)$$

где фазовые функции φ_1^+ , φ_2^+ , φ_1^- отвечают членам асимптотических разложений функций Вебера-Эрмита $D_{\nu,k}^{\pm}(X)$ и представлены в [4], а $\varphi_0(x) = \frac{x^2}{2} \sqrt{\beta}$. Можно показать, что $k(\varphi_0 + \varphi_1^+)$ - фаза волны, идущей к слою в области $x < x_d$, $k(\varphi_0 + \varphi_1^-)$ - фаза волны, также идущей к слою, а $k(\varphi_0 + \varphi_2^+)$ - фаза волны, идущей от слоя в указанной области.

Аналогично, в области выше уровня формирования волны просачивания ($x > x_u$), на уровне $x = +a$:

$$\psi_x(x) = e^{ik\varphi_0} * \beta^{1/8} \sqrt{\frac{\pi}{k}} * \left(C_- e^{i\frac{\pi}{4}} * e^{ik\varphi_1^-} + C_- e^{-i\frac{\pi}{4}} * e^{ik\varphi_2^-} + C_+ e^{-i\frac{\pi}{4}} * e^{ik\varphi_1^+} * e^{-\frac{k\pi}{2\sqrt{\beta}}(\beta a^2 - \text{Cos}^2\theta)} \right), \quad (13)$$

где $k(\varphi_0 + \varphi_1^-)$ - фаза волны, идущей сверху к слою в области $x > x_u$, $k(\varphi_0 + \varphi_1^+)$ - фаза волны, также идущей к слою, а $k(\varphi_0 + \varphi_2^-)$ - фаза волны, идущей от слоя вверх.

Теперь, учитывая, что на уровне $x = -a$ падающая волна имеет амплитуду 1, а на уровне $x = +a$ есть только волна, уходящая от слоя, нетрудно получить:

$$C_+ = \beta^{-1/8} \sqrt{\frac{k}{\pi}} * \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{1 + e^{-\frac{k\pi}{\sqrt{\beta}}(\beta a^2 - \text{Cos}^2\theta)}}, \quad C_- = \beta^{-1/8} \sqrt{\frac{k}{\pi}} * \frac{e^{+i\frac{\pi}{4}} * e^{-\frac{k\pi}{2\sqrt{\beta}}(\beta a^2 - \text{Cos}^2\theta)}}{1 + e^{-\frac{k\pi}{\sqrt{\beta}}(\beta a^2 - \text{Cos}^2\theta)}}. \quad (14)$$

Соответственно, для отраженной слоем и прошедшей через слой волн справедливы формулы:

$$\psi_{ref} = e^{ik(\varphi_0 + \varphi_2^+ + y * \sin\theta)} * \frac{e^{-\frac{i\pi}{2}}}{1 + e^{-\frac{k\pi}{\sqrt{\beta}}(\beta a^2 - \cos^2\theta)}}, \quad \psi_{tr} = e^{ik(\varphi_0 + \varphi_2^- + y * \sin\theta)} * \frac{e^{-\frac{k\pi}{2\sqrt{\beta}}(\beta a^2 - \cos^2\theta)}}{1 + e^{-\frac{k\pi}{\sqrt{\beta}}(\beta a^2 - \cos^2\theta)}}. \quad (15)$$

Множители, стоящие после экспонент, представляют коэффициент отражения и коэффициент прохождения (просачивания) для падающей на слой плоской волны.

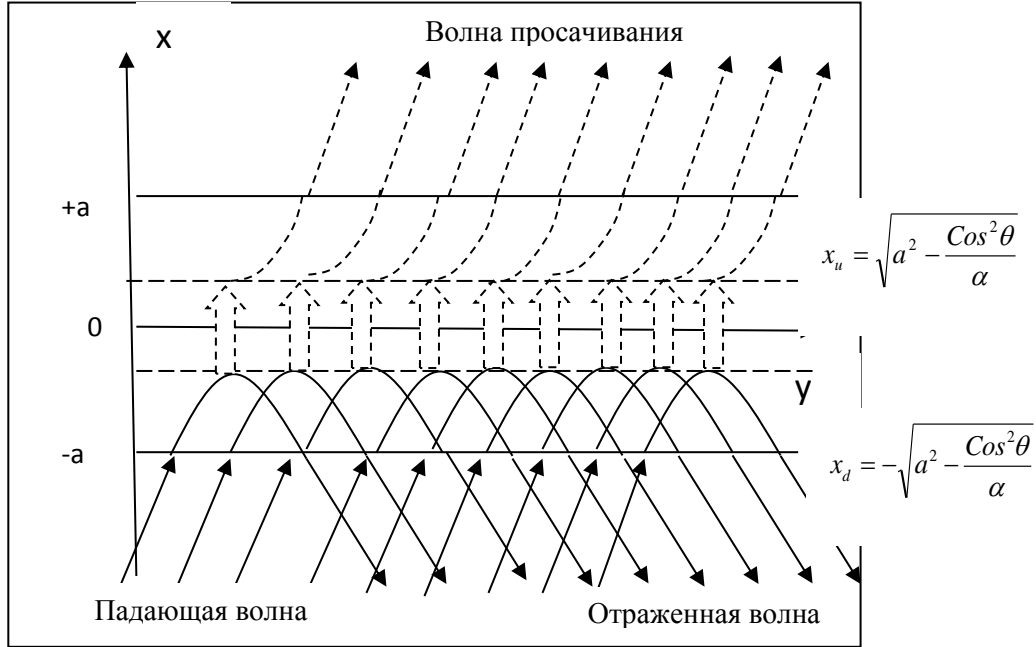


Рис. 2. Структура лучевых семейств в «отражающем» слое.

2. «Критический» слой ($\nu = 0$).

Для данной ситуации выполнено условие:

$$\cos^2\theta - \beta * a^2 = 0, \quad (16)$$

нижняя и верхняя каустики сливаются на уровне минимума приведенного показателя преломления (10) (Рис.3). Такой слой считается критическим, поскольку с позиции геометрической оптики семейство лучей плоской волны, падающей на слой, концентрируется вдоль оси слоя, формируя волну, бегущую по направлению y . В рамках геометрооптического приближения не происходит ни отражения волны, ни прохождения через слой. Асимптотики точного решения (5), (7) для данного случая содержат как вклад морсовских критических точек, так и члены, содержащие интеграл Бёмера – Френеля [4]. Используя приведенные в указанной работе асимптотические представления функции Вебера-Эрмита (8) и значение интеграла Бёмера при нулевом аргументе [6], можно получить следующие формулы для области ниже и выше слоя. Именно, в области ниже уровня отражения ($x < 0$), на уровне $x = -a$:

$$\psi_x(x) = e^{ik\varphi_0} * \beta^{1/8} * \sqrt{\frac{\pi}{k}} * \left(C_+ e^{i\frac{\pi}{4}} * e^{-ikx^2\sqrt{\beta}} + C_+ \sqrt{2} * e^{-i\frac{\pi}{4}} + C_- e^{-i\frac{\pi}{4}} * e^{-ikx^2\sqrt{\beta}} \right), \quad (17)$$

в области выше резонансного уровня ($x > 0_u$), на уровне $x = +a$:

$$\psi_x(x) = e^{ik\varphi_0} * \beta^{1/8} * \sqrt{\frac{\pi}{k}} * \left(C_- e^{i\frac{\pi}{4}} * e^{-ikx^2\sqrt{\beta}} + C_- \sqrt{2} * e^{-i\frac{\pi}{4}} + C_+ e^{-i\frac{\pi}{4}} * e^{-ikx^2\sqrt{\beta}} \right). \quad (18)$$

Как и в предыдущем случае, учитывая, что на уровне $x = -a$ падающая волна имеет амплитуду 1, а на уровне $x = +a$ есть только волна, уходящая от слоя, получаем:

$$C_+ = \beta^{-1/8} \sqrt{\frac{k}{\pi}} * \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2}, \quad C_- = \beta^{-1/8} \sqrt{\frac{k}{\pi}} * \frac{e^{+i\frac{\pi}{4}}}{2}. \quad (19)$$

Соответственно, для отраженной слоем и прошедшей через слой волн следуют формулы:

$$\psi_{ref} = e^{ik(\varphi_0 + y * \sin\theta)} * \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}}, \quad \psi_{tr} = e^{ik(\varphi_0 + y * \sin\theta)} * \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (20)$$

Коэффициент отражения и коэффициент прохождения (просачивания) для данного случая соответственно равны $-i/\sqrt{2}$ и $1/\sqrt{2}$.

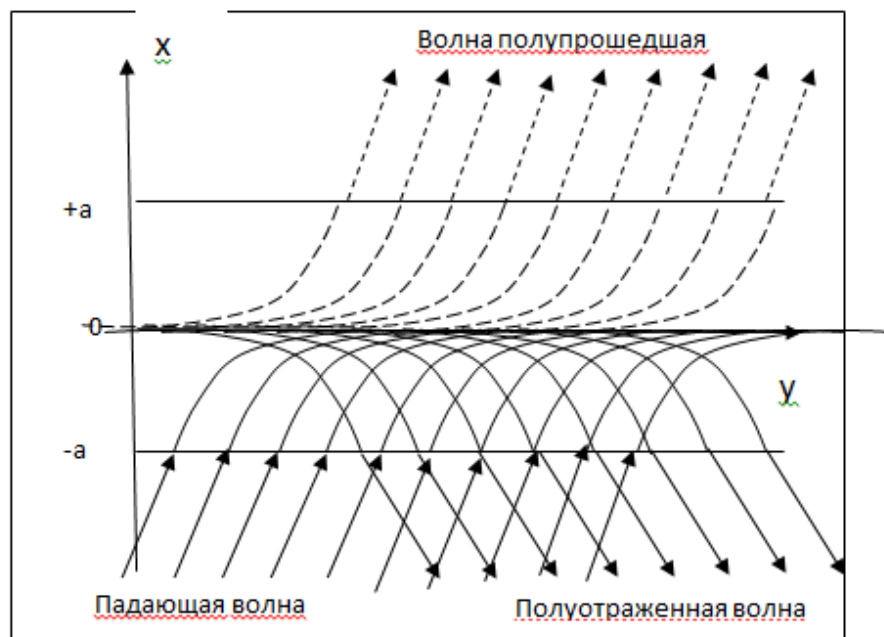


Рис. 3. Структура лучевых семейств в «критическом» слое.

3. «Прозрачный» слой ($\nu \leq -C_\nu < 0$).

В этом случае в плазменном слое нет области отрицательных значений для приведенного показателя преломления (10). Такой слой считается прозрачным, с позиции геометрической оптики все лучи, отвечающие падению плоской волны, проходят через слой, претерпевая рефракцию, каустики не образуются и на выходе из слоя формируется плоская волна, совпадающая по своим характеристикам с падающей волной (Рис. 4).

Тем не менее, благодаря эффекту надбарьерного отражения в слое формируется отраженная волна и часть энергии возвращается на уровень ниже слоя. Используя соответствующие данному случаю асимптотические разложения решения (5), (7), (8) из [4], можно получить следующие формулы, описывающие волновое поле ниже и выше слоя. Именно, в области ниже оси слоя ($x < 0$), на уровне $x = -a$:

$$\psi_x(x) = e^{ik\varphi_0} * \beta^{1/8} \sqrt{\frac{\pi}{k}} * \left(C_+ e^{i\frac{\pi}{4}} * e^{ik\varphi_1^+} + C_+ e^{-i\frac{\pi}{4}} * e^{ik\varphi_2^+} * e^{\frac{k\pi}{2\sqrt{\beta}} |\beta a^2 - \cos^2\theta|} + C_- e^{-i\frac{\pi}{4}} * e^{ik\varphi_1^-} * e^{\frac{k\pi}{2\sqrt{\beta}} |\beta a^2 - \cos^2\theta|} \right), \quad (21)$$

причем для фазовых функций в (21) справедливо соотношение: $\varphi_1^+ = \varphi_1^-$. Как и в случае (13) можно показать, что $k(\varphi_0 + \varphi_1^+) = k(\varphi_0 + \varphi_1^-)$ - фаза волн, идущих к слою в области $x < 0$, а $k(\varphi_0 + \varphi_2^+)$ - фаза волны, идущей от слоя в указанной области.

Аналогично, в области выше уровня формирования волны просачивания ($x > x_u$), на уровне $x = +a$:

$$\psi_x(x) = e^{ik\varphi_0} * \beta^{1/8} \sqrt{\frac{\pi}{k}} * \left(C_- e^{i\frac{\pi}{4}} * e^{ik\varphi_1^-} + C_- e^{-i\frac{\pi}{4}} * e^{ik\varphi_2^-} * e^{\frac{k\pi}{2\sqrt{\beta}}|\beta a^2 - \cos^2\theta|} + C_+ e^{-i\frac{\pi}{4}} * e^{ik\varphi_1^+} * e^{\frac{k\pi}{2\sqrt{\beta}}|\beta a^2 - \cos^2\theta|} \right), \quad (22)$$

и для фазовых функций в (22) также справедливо соотношение: $\varphi_1^+ = \varphi_1^-$. При этом $k(\varphi_0 + \varphi_1^+) = k(\varphi_0 + \varphi_1^-)$ - фаза волн, идущих сверху к слою в области $x > 0$, а $k(\varphi_0 + \varphi_2^-)$ - фаза волны, идущей от слоя вверх.

Вновь учитывая, что на уровне $x = -a$ падающая волна имеет амплитуду 1, а на уровне $x = +a$ есть только волна, уходящая от слоя, получаем:

$$C_+ = \beta^{-1/8} \sqrt{\frac{k}{\pi}} * \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{1 + e^{\frac{k\pi}{\sqrt{\beta}}|\beta a^2 - \cos^2\theta|}}, \quad C_- = \beta^{-1/8} \sqrt{\frac{k}{\pi}} * \frac{e^{+i\frac{\pi}{4}} * e^{\frac{k\pi}{2\sqrt{\beta}}|\beta a^2 - \cos^2\theta|}}{1 + e^{\frac{k\pi}{\sqrt{\beta}}|\beta a^2 - \cos^2\theta|}}. \quad (23)$$

Соответственно, для прошедшей через слой волны и для волны, сформированной надбарьерным отражением, справедливы формулы:

$$\psi_{tr} = e^{ik(\varphi_0 + \varphi_2^+ + y * \sin\theta)} * \frac{e^{\frac{k\pi}{\sqrt{\beta}}|\beta a^2 - \cos^2\theta|}}{1 + e^{\frac{k\pi}{\sqrt{\beta}}|\beta a^2 - \cos^2\theta|}}, \quad \psi_{ref} = e^{ik(\varphi_0 + \varphi_2^+ + y * \sin\theta)} * \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}} * e^{\frac{k\pi}{2\sqrt{\beta}}|\beta a^2 - \cos^2\theta|}}{1 + e^{\frac{k\pi}{\sqrt{\beta}}|\beta a^2 - \cos^2\theta|}} \quad (24)$$

Множители, стоящие после экспонент представляют, соответственно, коэффициент прохождения для падающей на слой плоской волны и коэффициент надбарьерного отражения. При условии $\nu \ll -C_\nu < 0$ (слабый эффект надбарьерного отражения) коэффициент прохождения равен 1, а коэффициент надбарьерного отражения экспоненциально мал:

$$\psi_{ref} \approx e^{ik(\varphi_0 + \varphi_2^+ + y * \sin\theta)} * e^{-i\frac{\pi}{2}} * e^{-\frac{k\pi}{2\sqrt{\beta}}|\beta a^2 - \cos^2\theta|}. \quad (25)$$

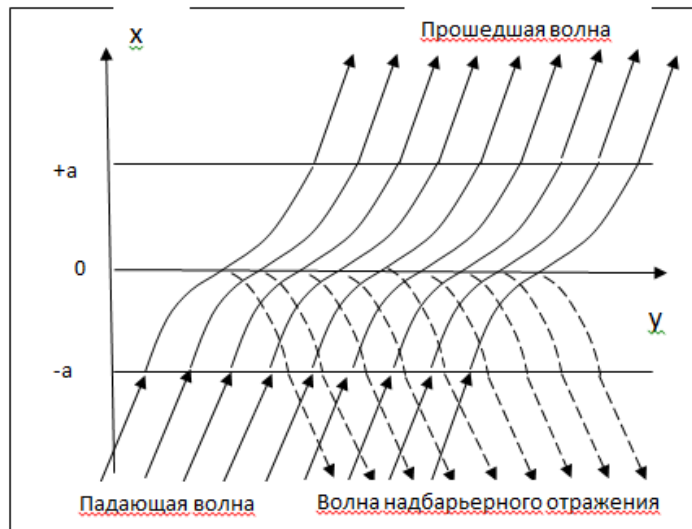


Рис. 4. Структура лучевых семейств в «прозрачном» слое.

Сравнивая представленные выражения для прошедших и отраженных волн при различных уровнях барьера («плотности» параболического слоя β), можно сделать следующие выводы.

1. Данные формулы не являются равномерными по параметру ν , поскольку использовались неравномерные асимптотики точного решения, позволяющие выделить квазиплоские волны, относительно которых и определены понятия коэффициентов отражения и прохождения.

2. Для «сшивки» формул для коэффициентов отражения и прохождения требуется использовать равномерные асимптотические представления точного решения, справедливые в области ниже слоя и выше слоя при любых значения параметра ν . Такие асимптотики [4] содержат интегральную функцию Бёмера, которую, в свою очередь, можно выразить через гамма-функцию комплексного аргумента [6]. Потому конечные формулы нельзя представить в элементарных функциях (кроме точки $\nu = 0$).

3. Для предложенных формул закон сохранения энергии выполняется с точностью применяемых асимптотических разложений. Именно:

для случая «Отражающего» и «Прозрачного» слоя

$$|\psi_{ref}|^2 + |\psi_{tr}|^2 = 1 + O\left(e^{-\frac{k\pi}{\sqrt{\beta}}|\beta\alpha^2 - \cos^2\theta|}\right) \rightarrow 1 \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad (26)$$

для случая «Критического» слоя

$$|\psi_{ref}|^2 + |\psi_{tr}|^2 = 1. \quad (27)$$

4. Коэффициенты прохождения и отражения плоской волны можно использовать в качестве множителей для расчета амплитуды и фазы лучевых полей выше и ниже слоя. Для случая «отражающего» слоя (Рис. 2) можно показать, что фаза дифракционно-лучевого поля волны просачивания равна фазе поля падающей волны (рассчитанной в геометрическом приближении), сопряженной с волной просачивания в вершине лучевой траектории. Для случая «прозрачного» слоя (Рис. 4) фаза волны надбарьерного отражения в геометрическом приближении может быть рассчитана как фаза падающей на слой волны до оси слоя плюс фаза волны, бегущей по симметричной траектории от оси слоя (с учетом фазового сдвига $-\frac{\pi}{2}$ в соответствии с (24)). Для случая «критического» слоя взаимное соответствие лучей падающей и отраженной волн в данной модельной задаче установить невозможно вследствие вырожденного пространственного спектра плоской волны. В моделях, более приближенных к реальным, волновое поле имеет аналитический пространственный спектр, и эта проблема снимается в рамках интегральных разложений по плоским волнам.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика (нерелятивистская теория) – Изд. 3-е. – М.: Наука, 1974. – 752 с. – («Теоретическая физика», т. III).
2. Гольданский В.И., Трахтенберг Л.И., Флёрсов В.Н. Туннельные явления в химической физике. – М.: Наука, 1986. – 296 с.
3. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
4. Палкин Е.А., А.А.Петрович. Специальные асимптотики функций параболического цилиндра (функций Вебера-Эрмита) с большим параметром. //Вестник Российского нового университета. Серия: «Сложные системы: модели, анализ и управление». – 2018. – вып. 1. С.18 – 27.

5. Палкин Е.А., А.А.Петрович. Специальные асимптотики функций Вебера-Эрмита и их применение в задачах распространения волн. //VII Всероссийские Армандовские чтения. Всероссийская научная конференция «Современные проблемы дистанционного зондирования, дифракции и распространения радиоволн». Материалы конференции, Муром, 27 - 29 июня 2017 г. Секция 1. Теоретические и прикладные вопросы распространения и дифракции радиоволн. С. 55 – 59.
6. Oldham К.В., Myland J.C. Spanier J. An atlas of functions. Изд.2-е – Springer, 2008. – 748с.
7. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Метод эталонных задач. – М.: Наука. 1972. – 456 с.