

Сравнение двух методов нахождения коэффициентов полиномов Чебышева при аппроксимации тригонометрической функции

С.Н. Жиганов, К.В. Михеев

Муромский институт (филиал) Владимирского государственного университета, 602264, Муром, ул. Орловская, 23. E-mail: s_zh_72@mail.ru, kiri-mikheev@yandex.ru.

В работе проведено сравнение двух методов нахождения полиномов наилучшего приближения при аппроксимации функции синус, основанные на минимизации максимальной ошибки на интервале аппроксимации и минимизации площади ошибки.

Введение

При реализации операций вычисления различных функциональных зависимостей в современных вычислительных устройствах, при формировании гармонических сигналов в цифровых синтезаторах частот, при формировании тестовых воздействий в современных информационно-измерительных системах используют методы аппроксимации. Существует огромное количество методов аппроксимации функциональных зависимостей. Наиболее пригодный для реализации в современных цифровых устройствах является метод, основанный на полиномах Чебышева [1,2], обеспечивающий наименьшие вычислительные затраты при его реализации при заданной точности по сравнению с другими методами. Существуют различные методы нахождения коэффициентов полиномов Чебышева, некоторые из них можно найти в работах [3-5].

Целью работы является сравнение двух методов вычисления коэффициентов полиномов Чебышева второго порядка на примере аппроксимации функции $\sin(x)$ на интервале изменения значений аргумента от нуля до π . При этом рассматриваются метод минимизирующий максимальную ошибку аппроксимации на интервале значения функции и метод минимизирующий площадь ошибки.

Описание методов расчета коэффициентов полинома Чебышева

При аппроксимации функции $f(x)$ будем использовать полином Чебышева порядка n вида

$$L_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \sum_{i=1}^n a_i x^i, \quad (1)$$

где a_0, \dots, a_{n+1} – коэффициенты полинома.

При сравнении методов вычисления коэффициентов полинома (1) в качестве $f(x)$ возьмем функцию синуса на интервале значений $x \in [0, \pi]$, т.е. $f(x) = \sin(x)$, а степень полинома выберем вторую, т.е. $n = 2$, а

$$L_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2. \quad (2)$$

Из (2) видно, что для задания полинома необходимо определить три коэффициента: a_0, a_1 и a_2 .

На рис. 1, а сплошной кривой приведен график функции $f(x) = \sin(x)$, а точечной кривой – график функции $L_2(x)$ при $x \in [0, \pi]$, а на рис. 1, б – график изменения ошибок аппроксимации

$$\delta(x) = f(x) - L_2(x) = \sin(x) - L_2(x). \quad (3)$$

На рис. 1, б обозначены - δ_{max} , δ_{min} - максимальная и минимальная ошибки аппроксимации на интервале значений функции; заштрихованная область на рис. 1, б - это площадь ошибок аппроксимации, которую можно определить из соотношения

$$S = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} |f(x) - L_2(x)| dx = \int_0^{\pi} |\sin(x) - a_0 - a_1x - a_2x^2| dx. \quad (4)$$

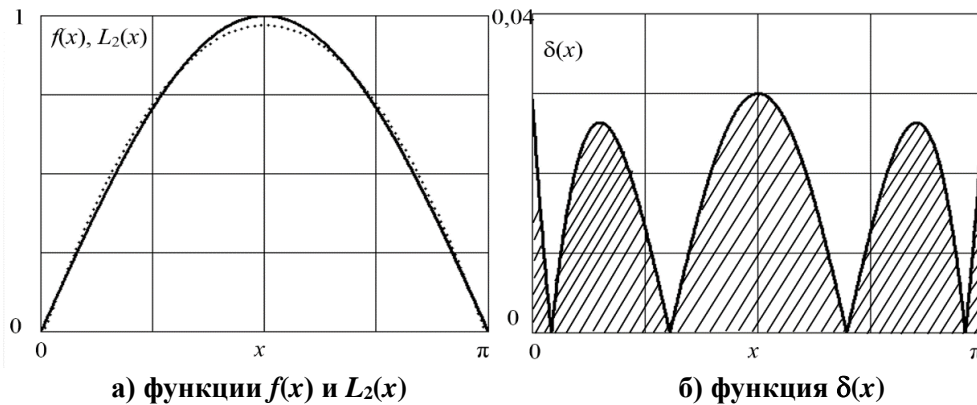


Рис.1. Аппроксимируемая, аппроксимирующая функции и функция ошибок аппроксимации.

Первый метод нахождения коэффициентов полинома (1) основан на том, что максимальные значения ошибок на всем интервале значения x будут принимать одинаковые значения. Этот метод подробно описан в [5], там же получено выражение для полинома, которое имеет вид

$$L_2^1(x) = -0,405 \left(x - \frac{\pi}{2} \right)^2 + 0,97. \quad (5)$$

В выражении (5) верхний индекс в обозначении полинома $L_2(x)$ определяет номер метода.

При использовании этого полинома максимальное значение ошибки аппроксимации составляет $\delta_{\max} = 0,03$, а площадь под кривой ошибок составляет $S^1 = 0,055$.

Второй метод нахождения коэффициентов полинома (1) основан на минимизации площади под кривой ошибок $\delta(x)$, т.е. необходимо найти коэффициенты полинома таким образом, чтобы выражение (4) было минимальным. Поскольку разность $f(x) - L_2(x)$ принимает положительные и отрицательные значения на интервале значений функции, то решать интеграл (4) необходимо на подинтервалах. Результатом решения будет некоторая функция, зависящая от трех неизвестных коэффициентов a_0, a_1 и $a_2 - S(a_0, a_1, a_2)$.

Для нахождения значений коэффициентов, минимизирующих выражение (4) необходимо решить систему уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{\partial S(a_0, a_1, a_2)}{\partial a_0} = 0 \\ \frac{\partial S(a_0, a_1, a_2)}{\partial a_1} = 0 \\ \frac{\partial S(a_0, a_1, a_2)}{\partial a_2} = 0 \end{cases}. \quad (6)$$

Средствами программы MathCAD была решена система уравнений (6) для разных исходных данных. Типичный вид кривой ошибок приведен на рис. 2, из которого видно, что максимальные ошибки наблюдаются на краях интервала аппроксимации. В

таблице 1 сведены полученные коэффициенты уравнения (2) и соответствующие им значения δ_{max} и S^2 .

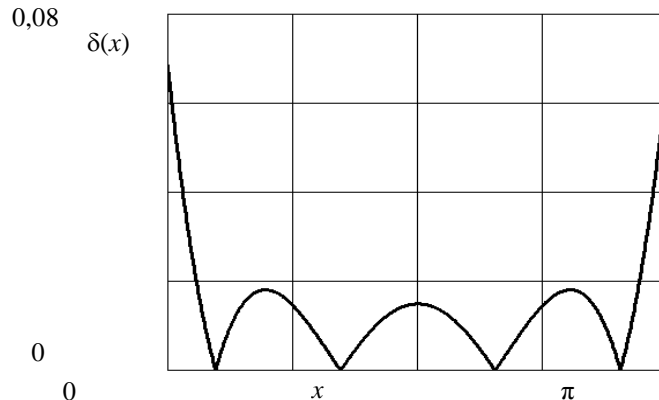


Рис.2. Кривая ошибок аппроксимации при использовании метода минимизации площади ошибки при $a_0 = -0,068$, $a_1 = 1,341$ и $a_2 = -0,427$.

В таблице 1 приведены значения рассчитанных коэффициентов полинома (2) для трех случаев: первая строка таблицы соответствует случаю, когда коэффициент $a_0 \neq 0$ (кривая ошибок приведена на рис. 2, она является симметричной относительно середине интервала аппроксимации, максимальные ошибки на краях интервала); в следующие строки таблицы 1 соответствуют случаю когда $a_0 = 0$, при этом значение ошибки в крайней левой точке интервала равна нулю $x \in [0, \pi]$; и, наконец, третий случай (две последние строки таблицы 1) соответствует ситуации, когда нулевая ошибка аппроксимации соответствует крайней правой точке интервала $x \in [0, \pi]$. На основе результатов таблицы 1 можно сделать вывод, что минимальная площадь ошибки соответствует случаю, когда $a_0 = -0,068$, $a_1 = 1,341$ и $a_2 = -0,427$, ее значение почти на 20% меньше площади, полученной первым методом, однако значение максимальной ошибки выше более чем в два раза. Искусственное изменение кривой ошибки изменяет значения δ_{max} и S^2 . Самый лучший случай, обеспечивающий минимальные вычислительные затраты, т.к. $a_0 = 0$ – это 3 и 4 строка таблицы, когда δ_{max} соизмеримы с первым методом, площадь ошибки не более чем в два раза выше для первого случая.

Заключение

В работе проведено сравнение двух методов расчета коэффициентов полинома Чебышева второго порядка, применяемого при аппроксимации функции $\sin(x)$ на интервале $x \in [0, \pi]$.

Таблица 1. Коэффициенты полинома Чебышева второго порядка, полученные методом минимизации площади ошибки

a_0	a_1	a_2	δ_{max}	S^2
-0,068	1,341	-0,427	0,068	0,045
0	1,273	-0,405	0,057	0,096
0	1,222	-0,389	0,04	0,078
0	1,26	-0,406	0,05	0,064
0	1,311	-0,428	0,11	0,096
0	1,295	-0,422	0,092	0,076
0,01	1,261	-0,401	0,056	0,105
-0,112	1,416	-0,451	0,112	0,058

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-37-00077.

Литература

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Лаборатория Базовых Знаний. - 2000. – 624с.
2. Ремез Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения. – Киев.: Наукова Думка. - 1969. – 625 с.
3. Chekushkin V.V., Panteleev I.V., Mikheev K.V. Improving Polynomial Methods of Reconstruction of Functional Dependences in Information-Measuring Systems. Measurement Techniques July 2015, Volume 58, Issue 4, PP 385-392. ISSN 0543-1972.
4. Galushkin A.I., Danilin S.N., Shchanikov S.A. The research of memristor-based neural network components operation accuracy in control and communication systems // Source of the Document 2015 International Siberian Conference on Control and Communications, SIBCON 2015 - Proceedings. 2015. PP. 1-6. (DOI: 10.1109/SIBCON.2015.7147034)
5. Чекушкин В.В., Булкин В.В. Вычислительные процессы в информационно-измерительных системах: учеб. пособие. — Изд.-полиграфический центр МИ ВлГУ. - 2009. - 120с.