Применение метода локальной асимптотики для численного моделирования структуры электромагнитного поля в каустических областях

Ю.И. Бова, А.С.Крюковский, Д.С. Лукин, Д.В. Растягаев

АНО ВО «Российский новый университет»
kryukovsky56@yandex.ru, julia_bova@mail.ru

В работе развит метод локальной асимптотики, описывающий структуру фокусировки электромагнитного поля в случае, когда семейство первичных (геометрооптических) и вторичных (краевых) лучей образуют фокальную область каспоидного типа (что соответствует волновой катастрофе $\mathbf{K}_{4,2}$*). Выполнен расчет коэффициентов универсальной деформации, функционального модуля и фазы бегущей волны, получены выражения для параметров универсальной деформации.*

In this work, a local asymptotic method is developed that describes the focusing structure of the electromagnetic field when the family of primary (geometrical-optical) and secondary (edge) rays form a focal region of the caspoid type (which corresponds to the wave catastrophe $\mathbf{K}_{4,2}$*). The calculation of the universal deformation coefficients, the functional modulus and the traveling wave phase has been performed, expressions for the parameters of universal deformation have been obtained.*

Теория катастроф может быть использована для описания волновых явлений в различных областях физики и позволяет адекватно описывать волновую структуру в фокальных и дифракционных областях, в задачах рассеяния и распространения излучения в виде эталонных структур, содержащих специальные функции волновых катастроф [1-6]. Решение этой задачи требует связать физические параметры реальной задачи с параметрами эталонных структур, соответствующих катастрофам того или иного типа. То есть решается задача нахождения «параметров подобия», главными из которых являются коэффициенты универсальной деформации и функциональные модули.

В работе рассматривается топологическая особенность, соответствующая унимодальной катастрофе $\mathbf{K}_{4,2}$. Отличительной чертой данной особенности является ее структурная устойчивость в четырехмерном пространстве. Данная катастрофа позволяет описывать совместную фокусировку семейств первичных геометрооптических (ГО) лучей и вторичных краевых лучей типа «каустическое острие» (в терминах теории катастроф – катастрофа каспоидного типа $\mathbf{A}_3$ [2,7-9]. Каустическая структура в окрестностях образования краевой катастрофы $K_{4,2}$ была рассмотрена в работах [4,10].

В настоящей работе методами локальной асимптотики построено первое приближение для коэффициентов универсальной деформации унимодальной краевой катастрофы $\Sigma = \mathbf{K}_{4,2}$, имеющей в терминах теории краевых катастроф разложение $\Sigma = (\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_3)$ [2,7,8]. Данная запись означает, что семейство ГО лучей (первая запись в разложении) образует особенность типа «каустическое острие» ($\mathbf{A}_3$) с краем и семейство краевых лучей (вторая запись в разложении) образует особенность $\mathbf{A}_3$. Известно, что выражение для универсальной деформации краевой катастрофы $\Sigma = \mathbf{K}_{4,2}$ имеет вид:

$$F_\Sigma = \nu_2 \xi_2^2 + a\xi_1^2 \xi_2 + \nu_1 \xi_1^4 + \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_1^2 + \lambda_3 \xi_2 + \lambda_4 \xi_1 \xi_2 , \qquad (1)$$

где $\nu_1 = \pm1$, $\nu_2 = \pm1$, a – функциональный модуль, а λ_j – коэффициенты универсальной деформации.

Для расчета параметров подобия рассмотрим фазовую функцию $\Phi(\eta_1,\eta_2,\vec{\alpha})$ в окрестности особой точки с координатами $(\vec{\alpha}_o)$, в которой универсальная деформация переходит в нормальную форму и имеет вид

$$F_\Sigma = \nu_2\xi_2^2 + a\xi_1^2\xi_2 + \nu_1\xi_1^4\,. \tag{2}$$

Справедливо тождество (см., например, [1,2,7]):

$$\Lambda\Phi = F_\Sigma + \theta\,, \tag{3}$$

где Λ – большой параметр задачи (Λ>>1, как аргумент не рассматривается), а $\theta(\vec{\alpha})$ – фаза бегущей волны. Для упрощения вычислений введем вспомогательную функцию $\mu = \Lambda\Phi$. Тогда основное тождество (3) приобретает вид:

$$C \equiv \mu(\eta_1(\vec{\alpha}),\eta_2(\vec{\alpha}),\vec{\alpha}) - F_\Sigma(\xi_1,\xi_2,a(\vec{\alpha}),\vec{\lambda}(\vec{\alpha})) - \theta(\vec{\alpha}) = 0\,. \tag{4}$$

Между внутренними переменными фазовой функции и внутренними переменными универсальной деформации существует взаимнооднозначное отображение [1,2,7]:

$$\begin{cases} \eta_1 = g_1(\xi_1,\xi_2,\vec{\alpha}) \\ \eta_2 = \eta_{o2} + \xi_2\, g_2(\xi_1,\xi_2,\vec{\alpha}) \end{cases}. \tag{5}$$

Для определения коэффициентов $\lambda_j(\vec{\alpha})$, функционального модуля $a(\vec{\alpha})$, и фазы бегущей волны $\theta(\vec{\alpha})$ используем разработанный нами метод локальной асимптотики [2, 11-15].

Введем обозначения для частных производных:

$$\mu_i = \left.\frac{\partial\mu}{\partial\eta_i}\right|_{(\vec{\alpha}_o)},\ \mu_{ik} = \left.\frac{\partial^2\mu}{\partial\eta_i\partial\eta_k}\right|_{(\vec{\alpha}_o)},\qquad \mu_{ijk} = \left.\frac{\partial^3\mu}{\partial\eta_i\partial\eta_j\partial\eta_k}\right|_{(\vec{\alpha}_o)},\ldots$$

$$p_j^i = \left.\frac{\partial\eta_i}{\partial\xi_j}\right|_{(\vec{\alpha}_o)},\qquad p_{jk}^i = \left.\frac{\partial^2\eta_i}{\partial\xi_{jk}}\right|_{(\vec{\alpha}_o)},\qquad p_{jkl}^i = \left.\frac{\partial^3\eta_i}{\partial\xi_j\partial\xi_k\partial\xi_l}\right|_{(\vec{\alpha}_o)},\ \ldots (i,j,k,l=1,2). \tag{6}$$

В более сложных случаях мы будем использовать обозначения:

$$\mu_{(n,m)} = \left.\frac{\partial^{n+m}\mu}{\partial\eta_1^n\partial\eta_2^m}\right|_{(\vec{\alpha}_o)},\qquad C_{(n,m)} = \left.\frac{\partial^{n+m}C}{\partial\eta_1^n\partial\eta_2^m}\right|_{(\vec{\alpha}_o)}\qquad p_{(n,m)}^i = \left.\frac{\partial^{n+m}\eta_i}{\partial\xi_1^n\partial\xi_2^m}\right|_{(\vec{\alpha}_o)}. \tag{7}$$

В особой точке $(\vec{\alpha}_o)$ справедливо выражение (см. [2])

$$\xi_1 = \xi_2 = 0,\ \vec{\eta} = \vec{\eta}_o\,. \tag{8}$$

Кроме того, при $\eta_2 = \eta_{o2}$ внутренняя переменная $\xi_2 = 0$ (см. (5)) (см. [2,7,8]), и тождество (4) переходит в тождество сужения:

$$\Omega \equiv \mu(\eta_1(\vec{\alpha}), \eta_{o2}, \vec{\alpha}) - \nu_1 \xi_1^4 - \lambda_1(\vec{\alpha})\xi_1 - \lambda_2(\vec{\alpha})\xi_1^2 - \theta(\vec{\alpha}) = 0\,. \tag{9}$$

Это тождество соответствует особенности **А3** для краевых лучей. В работах [2,13,15] показано, что в особой точке типа **А3** справедливо следующее:

$$\mu_1 = \mu_{11} = \mu_{111} = 0,\ \mu_{1111} \neq 0\,. \tag{10}$$

Учитывая выражение (10), нетрудно установить, что для получения значения p_1^1, необходимо продифференцировать тождество (9) в особой точке четыре раза по ξ_1, для определения p_{11}^1 – пять раз и так далее.

Выполняя данные вычисления, находим (см. также [2, 11, 15]):

$$d \equiv p_1^1 = \sqrt[4]{\frac{24}{|\mu_{1111}|}}\,, \qquad p_{11}^1 = -\frac{1}{10}\frac{\mu_{(5,0)}}{\mu_{(4,0)}} d^2\,, \quad p_{111}^1 = \left(\frac{21}{400}\frac{\mu_{(5,0)}^2}{\mu_{(4,0)}^2} - \frac{1}{20}\frac{\mu_{(6,0)}}{\mu_{(4,0)}}\right) d^3\,,$$

$$\nu_1 = \operatorname{sign}\mu_{1111}\,, \qquad p_{1111}^1 = \left(\frac{2}{25}\frac{\mu_{(5,0)}\mu_{(6,0)}}{\mu_{(4,0)}^2} - \frac{6}{125}\frac{\mu_{(5,0)}^3}{\mu_{(4,0)}^3} - \frac{1}{35}\frac{\mu_{(7,0)}}{\mu_{(4,0)}}\right) d^4\,,$$

$$p_{(5,0)}^1 = \left(\frac{9}{140}\frac{\mu_{(5,0)}\mu_{(7,0)}}{\mu_{(4,0)}^2} + \frac{3}{80}\frac{\mu_{(6,0)}^2}{\mu_{(4,0)}^2} - \frac{117}{800}\frac{\mu_{(5,0)}^2\mu_{(6,0)}}{\mu_{(4,0)}^3} + \frac{1989}{32000}\frac{\mu_{(5,0)}^4}{\mu_{(4,0)}^4} - \frac{1}{56}\frac{\mu_{(8,0)}}{\mu_{(4,0)}}\right) d^5 \tag{11}$$

Заметим, что формулы (11) получаются последовательно из анализа производных $C_{(n,0)}$ или $\Omega_{(n,0)}$ при n=4,5,6,7,8, вычисленных в особой точке.

В дальнейшем нам потребуются для получения первого приближения значения

$$p_\alpha^1 = \frac{\partial \eta_1}{\partial \alpha_j} \text{ и } p_{1\alpha}^1 = \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial \xi_1 \partial \alpha_j}\,.$$

Величина p_α^1 находится из анализа $\Omega_{(3,\alpha)}$ в особой точке и имеет вид:

$$p_\alpha^1 = -\frac{\mu'_{\alpha(3,0)}}{\mu_{(4,0)}} + \frac{3}{10}\frac{\mu_{(5,0)}\mu'_{\alpha(2,0)}}{\mu_{(4,0)}^2} - \frac{21}{400}\frac{\mu_{(5,0)}^2\mu'_{\alpha(1,0)}}{\mu_{(4,0)}^3} + \frac{1}{20}\frac{\mu_{(6,0)}\mu'_{\alpha(1,0)}}{\mu_{(4,0)}^2}\,. \tag{12}$$

Вторая величина – $p_{1\alpha}^1$ находится из анализа $\Omega_{(4,\alpha)}$ в особой точке:

$$
\begin{aligned}
p^1_{1\alpha} = -\frac{p^1_1}{4\mu_{(4,0)}}\Bigg(&\mu'_{\alpha(4,0)} - \frac{\mu_{(5,0)}\mu'_{\alpha(3,0)}}{\mu_{(4,0)}} + \frac{9}{25}\frac{\mu^2_{(5,0)}\mu'_{\alpha(2,0)}}{\mu^2_{(4,0)}} - \frac{1}{5}\frac{\mu_{(6,0)}\mu'_{\alpha(2,0)}}{\mu_{(4,0)}} - \\
&- \frac{69}{1000}\frac{\mu^3_{(5,0)}\mu'_{\alpha(1,0)}}{\mu^3_{(4,0)}} + \frac{1}{10}\frac{\mu_{(5,0)}\mu_{(6,0)}\mu'_{\alpha(1,0)}}{\mu^2_{(4,0)}} - \frac{1}{35}\frac{\mu_{(7,0)}\mu'_{\alpha(1,0)}}{\mu_{(4,0)}}\Bigg).
\end{aligned} \tag{13}
$$

Будем искать приближённые выражения для $\lambda_j(\vec{\alpha})$, $a(\vec{\alpha})$ и $\theta(\vec{\alpha})$ в виде:

$$
\begin{gathered}
\lambda_j(\vec{\alpha}) \cong \sum_{k=1}^{M} \lambda_{j\alpha_k} \Delta\alpha_k \, , \; a(\vec{\alpha}) \cong a_F + \sum_{k=1}^{M} a_{\alpha_k} \Delta\alpha_k \, , \\
\theta(\vec{\alpha}) \cong \theta_o + \sum_{k=1}^{M} \theta_{\alpha_k} \Delta\alpha_k + \sum_{k=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} \theta_{\alpha_k \alpha_j} \Delta\alpha_k \Delta\alpha_j \, ,
\end{gathered} \tag{14}
$$

Здесь $\Delta\alpha_k = \alpha_k - \alpha_{ok}$, а M – это размерность конфигурационного пространства. В дальнейшем для сокращения записи индекс k у α_k будем опускать, как это сделано в выражениях (12) и (13).

Теперь определим коэффициенты, входящие в выражение (14). Для того чтобы найти $\lambda_{1\alpha}$ продифференцируем сужение (9) один раз по ξ_1, один раз по α (то есть вычислим $\Omega_{(1,0)\alpha}$) и положим:

$$
\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_o, \;\; \xi_1 = 0. \tag{15}
$$

Тогда величина:

$$
\lambda_{1\alpha} = \mu_{1\alpha}\, p^1_1 \, . \tag{16}
$$

Перейдем теперь к вычислению $\lambda_{2\alpha}$. Для того чтобы найти $\lambda_{2\alpha}$ необходимо продифференцировать тождество (9) два раза по ξ_1, один раз по α ($\Omega_{(2,0)\alpha}$) и учесть (15). В результате получим следующее выражение:

$$
\lambda_{2\alpha} = \frac{1}{2}\left(\mu_{1\alpha}\, p^1_{11} + \mu_{11\alpha}\,(p^1_1)^2\right). \tag{17}
$$

Входящие в выражение (17) необходимые величины уже определены в формулах (11).

Рассмотрим теперь выражение для фазы бегущей волны $\theta(\vec{\alpha})$ с точностью до членов второго порядка включительно.

Величина $\theta(\vec{\alpha}_o)$ легко определяется из тождества (9):

$$
\theta_o \equiv \theta(\vec{\alpha}_o) = \mu(\eta_1(0, \vec{\alpha}_o), \eta_{o2}, \vec{\alpha}_o) \, , \tag{18}
$$

где $\eta_1(0, \vec{\alpha}_o) = \eta_{o1}$ – значение первого внутреннего параметра задачи в особой точке.

Для расчета θ_α продифференцируем тождество (9), один раз по α ($\Omega_{(0,0)\alpha}$) и учтём (15). Тогда:

$$\theta_\alpha = \mu_\alpha \ . \tag{19}$$

Для вычисления коэффициентов $\theta_{\alpha\beta}$, $\alpha = \alpha_k$, $\beta = \beta_j$ продифференцируем тождество (9) ещё и по β. Проведя анализ $\Omega_{(0,0)\alpha\beta}$ в особой точке, находим:

$$\theta_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta} + \mu_{1\alpha} p^1_\beta + \mu_{1\beta} p^1_\alpha . \tag{20}$$

Все величины, входящие в (20), известны (см. (12)).

Таким образом, сужение позволило нам определить линейное приближение для величин λ_1, λ_2 и θ.

Для нахождения приближения для λ_3, λ_4 и функционального модуля a необходимо рассмотреть полное выражение для универсальной деформации (1) особенности Σ= **K4,2**.

Здесь следует отметить, что, во-первых, все производные η_2 по ξ_1 и α равны нулю:

$$p^2_{(n,0)} = 0, \quad p^2_{(n,0)\alpha} = 0 , \tag{21}$$

что явно следует из (5), а во-вторых, в особой точке справедливо

$$\mu_{12} = 0 , \tag{22}$$

что вытекает из равенства нулю в особой точке $C_{(1,1)}$.

Найдем линейное приближение для коэффициента λ_3. Для этого продифференцируем тождество (4) один раз по ξ_2, один раз по α (то есть, вычислим $C_{(0,1)\alpha}$) и учтём (15), (21), (22). Тогда:

$$\lambda_{3\alpha} = \mu_{1\alpha}\, p^1_2 + \mu_{2\alpha}\, p^2_2 . \qquad . \tag{23}$$

Для вычисления p^2_2 продифференцируем дважды по ξ_2 тождество (4) в особой точке, то есть, вычислим $C_{(0,2)}$ и получим выражение

$$p^2_2 = \sqrt{\frac{2}{|\mu_{22}|}} , \ \ \nu_2 = \operatorname{sign} \mu_{22} . \tag{24}$$

Сложнее определяется производная p^1_2. Для этого вычислим в особой точке производные тождества (4) $C_{(1,2)}$ и $C_{(3,1)}$ и решим систему уравнений относительно p^1_2 и p^2_{12}. Находим:

$$p_2^1 = -\frac{p_2^2}{2(3\mu_{112}^2 - \mu_{1111}\mu_{22})}\left(3\mu_{112}\mu_{122} - 2\mu_{1112}\mu_{22} + \frac{3\mu_{112}\mu_{22}\mu_{(5,0)}}{5\mu_{1111}}\right),$$

$$p_{12}^2 = -\frac{p_2^2 p_1^1}{2(3\mu_{112}^2 - \mu_{1111}\mu_{22})}\left(2\mu_{1112}\mu_{112} - \frac{3\mu_{(5,0)}\mu_{112}^2}{5\mu_{1111}} - \mu_{1111}\mu_{122}\right). \qquad (25)$$

Из формул (25) следует, что особенность **K4,2** образуется при выполнении условия:

$$3\mu_{112}^2 \neq \mu_{1111}\mu_{22}. \qquad (26)$$

Перейдем теперь к определению линейного приближения для коэффициента λ_4. Для расчета продифференцируем тождество (4) по ξ_1, по ξ_2 и по α. Тогда справедливо выражение:

$$\lambda_{4\alpha} = \left(\mu_{112}\, p_\alpha^1 p_2^2 + \mu_{11\alpha}\, p_2^1 + \mu_{12\alpha}\, p_2^2\right) p_1^1 + \mu_{1\alpha}\, p_{12}^1 + \mu_{2\alpha}\, p_{12}^2. \qquad (27)$$

В данной формуле нам известны уже все выражения, кроме p_{12}^1. Для расчета производной p_{12}^1 вычислим в особой точке производные тождества (4) $C_{(2,2)}$ и $C_{(4,1)}$ решим систему уравнений и найдём p_{12}^1 и p_{112}^2:

$$\begin{aligned}
p_{12}^1 = {} & \frac{1}{4\left(p_1^1\right)^3 p_2^2 (3\mu_{112}^2 - \mu_{1111}\mu_{22})} \times \\
& \times \Bigg(-3\mu_{112}\left(p_1^1\right)^2 \Bigg(\left(p_1^1\right)^2 \left(\mu_{1111}\left(p_2^1\right)^2 + 2\mu_{1112}\, p_2^1 p_2^2 + \mu_{112}\, p_{22}^2 + \right. \\
& \left. + \mu_{1122}\left(p_2^2\right)^2 \right) + 4 p_1^1 p_{12}^2 \left(\left(\mu_{112}\, p_2^1 + \mu_{122}\, p_2^2\right) + p_{11}^1 p_2^2 \left(2\mu_{112}\, p_2^1 + \mu_{122}\, p_2^2\right)\right) \Bigg) + \Bigg(\left(p_1^1\right)^2 p_2^2 \times \\
& \times \left(p_1^1 \left(\mu_{(5,0)}\, p_1^1 p_2^1 + \mu_{(4,1)}\, p_1^1 p_2^2 + 4\mu_{1112}\, p_{12}^2\right) + 6 p_{11}^1 \left(\mu_{1111}\, p_2^1 + \mu_{1112}\, p_2^2\right)\right) + \\
& + \left(-6\left(p_1^1\right)^2 \left(p_{12}^2\right)^2 + 3\left(p_{11}^1\right)^2 \left(p_2^2\right)^2 + 4 p_1^1 p_2^2 \left(3 p_{11}^1 p_{12}^2 + p_{111}^1 p_2^2\right)\right)\mu_{112} \Bigg)\mu_{22} \Bigg)
\end{aligned} \qquad (28)$$

$$\begin{aligned}
p_{112}^2 = {} & \frac{1}{8\left(p_1^1\right)^3 p_2^2 (3\mu_{112}^2 - \mu_{1111}\mu_{22})} \times \\
& \times \Bigg(-4\mu_{112}\, p_1^1 p_2^2 \Bigg(\left(p_1^1\right)^4 \left(\mu_{(5,0)}\, p_2^1 + \mu_{(4,1)}\, p_2^2\right) + 4\mu_{1112}\left(p_1^1\right)^3 p_{12}^2 + 6\left(p_1^1\right)^2 p_{11}^1 \times \\
& \times \left(\mu_{1111}\, p_2^1 + \mu_{1112}\, p_2^2\right) + 3\mu_{112}\left(p_{11}^1\right)^2 p_2^2 + 4 p_1^1 \mu_{112}\left(3 p_{11}^1 p_{12}^2 + p_{111}^1 p_2^2\right)\Bigg) + \\
& + 4\mu_{1111}\left(p_1^1\right)^3 \Bigg(\left(p_1^1\right)^2 \left(\mu_{1111}\left(p_2^1\right)^2 + 2\mu_{1112}\, p_2^1 p_2^2 + \mu_{112}\, p_{22}^2 + \mu_{1122}\left(p_2^2\right)^2 \right) + \\
& + 4 p_1^1 p_{12}^2 \left(\mu_{112}\, p_2^1 + \mu_{122}\, p_2^2\right) + p_{11}^1 p_2^2 \left(2\mu_{112}\, p_2^1 + \mu_{122}\, p_2^2\right) + 2\mu_{22}\left(p_{12}^2\right)^2 \Bigg)\Bigg)
\end{aligned} \qquad (29)$$

В формулах (28), (29) не известна величина p_{22}^2. Для определения этой производной продифференцируем в особой точке тождество (4) три раза по ξ_2. Из анализа $C_{(0,3)}$ находим:

$$p_{22}^2 = -\frac{1}{3\mu_{22}}\left(3\mu_{112}\left(p_2^1\right)^2 + 3\mu_{122}\,p_2^1 p_2^2 + \mu_{222}\left(p_2^2\right)^2\right). \tag{30}$$

Определим теперь функциональный модуль a. Величина a_F находится просто. Продифференцируем тождество (4) в особой точке два раза по ξ_1 и один раз по ξ_2 ($C_{(2,1)}$). Тогда получим, что

$$a_F = \frac{1}{2}\mu_{112}\left(p_1^1\right)^2 p_2^2. \tag{31}$$

Коэффициент a_α найдём из анализа производной $C_{(2,1)\alpha}$:

$$\begin{aligned} a_\alpha = \frac{1}{2}\Big(&\left(p_1^1\right)^2\left(\mu_{1112}\,p_\alpha^1 p_2^2 + p_2^1\left(\mu_{1111}\,p_\alpha^1 + \mu_{111\alpha}\right) + \mu_{112}\,p_{2\alpha}^2 + \mu_{112\alpha}\,p_2^2\right) + \\ &+ 2\,p_1^1\left(\mu_{112}\,p_\alpha^1 p_{12}^2 + \mu_{112}\,p_{1\alpha}^1 p_2^2 + \mu_{11\alpha}\,p_{12}^1 + \mu_{12\alpha}\,p_{12}^2\right) + \\ &+ p_{11}^1\left(\mu_{112}\,p_\alpha^1 p_2^2 + \mu_{11\alpha}\,p_2^1 + \mu_{12\alpha}\,p_2^2\right) + \mu_{1\alpha}\,p_{112}^1 + \mu_{2\alpha}\,p_{112}^2\Big) \end{aligned}. \tag{32}$$

В данную формулу входит производная $p_{2\alpha}^2$, которую найдём из анализа производной $C_{(0,2)\alpha}$ тождества (4):

$$\begin{aligned} p_{2\alpha}^2 = -\frac{1}{2\mu_{22}\,p_2^2}\Big(&\mu_{11\alpha}\left(p_2^1\right)^2 + \mu_{122}\,p_\alpha^1\left(p_2^2\right)^2 + 2\,p_2^1 p_2^2\left(\mu_{112}\,p_\alpha^1 + \mu_{12\alpha}\right) + \\ &+ \mu_{1\alpha}\,p_{22}^1 + \mu_{22\alpha}\left(p_2^2\right)^2 + \mu_{2\alpha}\,p_{22}^2\Big) \end{aligned}. \tag{33}$$

В выражения (32) и (33), помимо вычисленных выше, входят также производные p_{22}^1, p_{1112}^1, p_{112}^2. Эти величины, а также p_{1112}^2 могут быть найдены как решения четырёх уравнений $C_{(1,3)}$, $C_{(3,2)}$, $C_{(5,1)}$, $C_{(4,2)}$, найденных их тождества (4). К сожалению, явные выражения для данных производных слишком громоздкие, и не могут быть приведены в данной работе.

Таким образом, в данной работе получены формулы, позволяющие выполнить расчет в первом приближении параметров универсальной деформации волновой катастрофы типа $K_{4,2}$. Данная катастрофа соответствует единой структурно-устойчивой дифракционной фокусировкой как краевых лучей, образующих каустическое острие A_3, так и геометрооптических лучей, образующих каустическое острие A_3 с краем.

Коэффициенты, образующие вектор $\vec{\lambda}(\vec{\alpha})$, были вычислены в линейном приближении, в то время как фаза бегущей волны $\theta(\vec{\alpha})$ найдена во втором квадратичном приближении. Для функционального модуля a мы ограничились нулевым приближением и указали путь для явного вычисления линейного приближения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 18-02-00544-а, 17-02-01183-а).

Литература

1. Kryukovskii A.S., Rastyagaev D.V., Lukin D.S. Construction of uniform asymptotic solutions of wave-type differential equations by methods of catastrophe theory // Russian Journal of Mathematical Physics. 2009. V. 16. № 2. P. 251-264.
2. Крюковский А.С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф. М.: РосНОУ, 2013. 368 с.
3. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. Исследование устойчивых фокусировок, возникающих при нарушении симметрии волнового фронта // Распространение и дифракция электромагнитных волн М.: МФТИ, 1993. С. 20-37.
4. Дорохина Т.В., Крюковский А.С., Лукин Д.С. Информационная система "Волновые катастрофы в радиофизике, акустике и квантовой механике" // Электромагнитные волны и электронные системы. 2007. Т. 12. № 8. С. 71-74.
5. Крюковский А.С., Лукин Д.С. К вопросу о поле в окрестности каустического острия в ионосферном плазменном слое // Радиотехника и электроника. 1981. Т. 26. № 6. С. 1121-1126.
6. Balykina A.M., Kryukovskii A.S. Investigation of the electromagnetic field of caustic-cusp and butterfly edge waves in the shadow region // Journal of Communications Technology and Electronics. 2010. Т. 55. № 5. С. 497-504.
7. Крюковский А. С., Лукин Д. С., Палкин Е. А. Применение теории краевых катастроф для построения равномерных асимптотик быстроосциллирующих интегралов // Дифракция и распространение волн. Междувед. сборник / МФТИ. М., 1985. С. 4 - 21.
8. Kryukovsky A. S., Lukin D. S., Palkin E. A. Uniform asymptotics for evaluating oscillatory edge integrals by methods of catastrophe theory // Soviet journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 1987. V. 2. № 4. P. 219 - 312.
9. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Применение теории катастроф для описания пространственно-временной структуры частотно-модулированного сигнала в плазме // Электромагнитные волны и электронные системы. 2013. Т. 18. № 8. С. 18-23.
10. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Каустическая структура краевой катастрофы K4,2. // Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ и управление» / М.: РосНОУ, 2015. Выпуск 2(10). – С. 5–9.
11. Kryukovskii A.S. Local uniform asymptotics of wave fields in the vicinity of basic and boundary cuspoidal caustics // Journal of Communications Technology and Electronics. 1996. Т. 41. № 1. С. 51-57.
12. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Локальное асимптотическое описание электромагнитного поля в окрестности каустического острия в плоско – слоистой среде // Вопросы дифракции электромагнитных волн. М., изд. МФТИ, 1982. С. 40-45.
13. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. О необходимых и достаточных условиях образования каспоидных катастроф // Распространение и дифракция волн в неоднородных средах М.: МФТИ, 1989. С. 56-60.
14. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Локальные асимптотики волновых полей в фокальных областях типа катастроф коранга один и два // Вестник Российского нового университета. Серия: Сложные системы: модели, анализ и управление. 2018. № 1. С. 5-17.
15. Крюковский А.С. Локальное определение коэффициентов универсальной деформации катастрофы A3. // Вестник Российского нового университета. Серия: Сложные системы: модели, анализ и управление. 2018. № 2. С. 5-10.