

Возбуждение электромагнитных волн несимметричным током, заданным на поверхности открытого гиротропного цилиндрического волновода

О.М. Остафийчук, В.А. Еськин, А.В. Кудрин,

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, e-mail: olegost09@rambler.ru

Исследуется возбуждение электромагнитного поля источником в виде несимметричного электрического тока, заданного на поверхности открытого цилиндрического волновода с гиротропным заполнением. Предполагается, что волновод находится в свободном пространстве и ориентирован вдоль внешнего постоянного магнитного поля. На основе разложения возбуждаемого поля по системе собственных волн такого волновода, содержащей волны дискретной и непрерывной частей пространственного спектра, определены энергетические характеристики излучения данного источника.

Excitation of an electromagnetic field by a source in the form of a nonsymmetric electric current specified on the surface of an open cylindrical gyrotropic waveguide is studied. It is assumed that the waveguide is located in free space and aligned with an external static magnetic field. Based on the expansion of the excited field in terms of eigenwaves of such a waveguide, the set of which comprises the discrete- and continuous-spectrum waves, the energy characteristics of radiation from this source are determined.

Введение

Проблеме возбуждения и распространения электромагнитных волн, направляемых гиротропными цилиндрическими структурами, посвящено большое число работ. В случае, когда гиротропной средой, заполняющей такие системы, является магнитоактивная плазма, интерес к ним обусловлен, прежде всего, важной ролью, которую подобные структуры могут играть в условиях ионосферы и магнитосферы Земли [1], а также в лабораторных экспериментах с геликонными источниками плазмы [2–4]. В значительном числе теоретических работ по данной тематике рассматривается возбуждение волн симметричными источниками в виде рамочных антенн. Кроме того, в подавляющем большинстве работ обсуждается возбуждение лишь волн дискретной части спектра (собственных мод волновода), что не дает полного представления о поведении электродинамических характеристик источников. Следует, однако, заметить что подробное теоретическое исследование излучения произвольных источников при наличии гиротропной цилиндрической направляющей структуры, окруженной средой с анизотропными свойствами, было проведено в работе [5]. Тем не менее, особенности возбуждения электромагнитных волн несимметричными источниками при наличии открытого гиротропного волновода, окруженного изотропной средой, не получили до сих пор исчерпывающего теоретического рассмотрения.

Настоящая работа посвящена изучению характеристик излучения источников, используемых для возбуждения высокочастотных разрядов геликонного типа, в рамках строгого подхода, опирающегося на разложение полного поля по системе собственных волн открытого гиротропного волновода, окруженного изотропной средой [6]. При построении этого представления учитываются волны как дискретной, так и непрерывной части пространственного спектра. Далее получены энергетические характеристики излучения источника, возбуждающего электромагнитное поле в данном случае.

Постановка задачи и основные соотношения

Рассмотрим бесконечно протяженный цилиндрический волновод радиуса a , заполненный гиротропной средой (магнитоактивной плазмой) и расположенный в свободном пространстве. Волновод находится во внешнем постоянном магнитном поле \mathbf{B}_0 , направленном вдоль оси z цилиндрической системы координат (ρ, ϕ, z) . Поле возбуждается током, заданным на поверхности цилиндра и имеющим гармоническую зависимость от времени вида $\exp(i\omega t)$. Комплексная амплитуда плотности тока может быть записана в виде

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = (\phi_0 j_\phi + z_0 j_z) \delta(\rho - a) \exp(-im\phi - ik_0 p_0 z), \quad |z| < d, \quad (1)$$

где δ – функция Дирака,

d – половинная длина источника в продольном направлении,

$k_0 = \omega/c$ – волновое число в свободном пространстве (c – скорость света в вакууме).

Компоненты электрического тока связаны с его абсолютным значением $|I_0|$ соотношением $|I_0|^2 = |I_\phi|^2 + |I_z|^2$, где $I_\phi = 2d j_\phi$ и $I_z = 2\pi a j_z$. Величины m и p_0 в выражении (1) определяют неоднородность распределения тока по азимутальной и продольной координатам соответственно.

Холодная бесстолкновительная магнитоактивная плазма, заполняющая волновод, описывается тензором диэлектрической проницаемости

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -ig & 0 \\ ig & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где

$$\varepsilon = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_H^2 - \omega^2} + \frac{\Omega_p^2}{\Omega_H^2 - \omega^2}, \quad g = -\frac{\omega_p^2 \omega_H}{\omega(\omega_H^2 - \omega^2)} + \frac{\Omega_p^2 \Omega_H}{\omega(\Omega_H^2 - \omega^2)}, \quad \eta = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\Omega_p^2}{\omega^2}. \quad (3)$$

Здесь Ω_H – гирочастота ионов, Ω_p – плазменная частота ионов, ω_H и ω_p – гирочастота и плазменная частота электронов соответственно.

Поле, возбуждаемое источником при наличии открытого цилиндрического волновода

Поле, возбуждаемое источником с плотностью тока (1), в области пространства $|z| > d$ может быть записано в виде разложения по собственным волнам дискретной и непрерывной частей пространственного спектра следующим образом [7]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = \sum_n a_{s,m,n} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{s,m,n}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_{s,m,n}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} + \sum_{\alpha=1}^2 \int_0^\infty a_{s,m,\alpha}(q) \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{s,m,\alpha}(\mathbf{r}, q) \\ \mathbf{H}_{s,m,\alpha}(\mathbf{r}, q) \end{bmatrix} dq, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{s,m,n}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_{s,m,n}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{s,m,n}(\rho) \\ \mathbf{H}_{s,m,n}(\rho) \end{bmatrix} \exp(-im\phi - ik_0 p_{s,m,n} z), \\ \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{s,m,\alpha}(\mathbf{r}, q) \\ \mathbf{H}_{s,m,\alpha}(\mathbf{r}, q) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{s,m,\alpha}(\rho, q) \\ \mathbf{H}_{s,m,\alpha}(\rho, q) \end{bmatrix} \exp(-im\phi - ik_0 p_s(q) z). \end{aligned}$$

Здесь векторные функции $\mathbf{E}_{s,m,n}(\rho)$, $\mathbf{H}_{s,m,n}(\rho)$ и $\mathbf{E}_{s,m,\alpha}(\rho, q)$, $\mathbf{H}_{s,m,\alpha}(\rho, q)$ описывают поперечное распределение полей волн дискретного и непрерывного спектра соответственно; индекс s обозначает направление распространения волны, отрицательное ($s=-$) или положительное ($s=+$) по отношению к оси z ; m – азимутальный индекс; n – радиальный индекс собственных мод (волн дискретной части спектра) с постоянными распространения $p_{s,m,n}$ ($p_{+,m,n} = -p_{-,m,n}$); индекс α отмечает типы волн непрерывной части спектра ($\alpha = 1, 2$) с разными поляризациями, но одинаковыми постоянными распространения $p_s(q) = (1 - q^2)^{1/2}$, где величина q является нормированным на k_0 поперечным волновым числом в свободном пространстве (подробности см. в [6]). В выражении (4) учтено, что источник (1) возбуждает только волны с азимутальным индексом m . Коэффициенты возбуждения волн $a_{s,m,n}$ и $a_{s,m,\alpha}(q)$ могут быть получены с помощью известного метода, разработанного для открытых направляющих систем и опирающегося на «транспонированную» лемму Лоренца [7]:

$$\begin{aligned} a_{s,m,n} &= \frac{1}{N_{s,m,n}} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{-s,-m,n}^{(T)}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \\ &= \frac{4\pi a}{N_{s,m,n}} \left[j_\phi E_{\phi;-s,-m,n}^{(T)}(a) + j_z E_{z;-s,-m,n}^{(T)}(a) \right] \frac{\sin[k_0(p_0 - p_{s,m,n})d]}{k_0(p_0 - p_{s,m,n})}, \\ a_{s,m,\alpha}(q) &= \frac{1}{N_{s,m,\alpha}(q)} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{-s,-m,\alpha}^{(T)}(\mathbf{r}, q) d\mathbf{r} = \\ &= \frac{4\pi a}{N_{s,m,\alpha}(q)} \left[j_\phi E_{\phi;-s,-m,\alpha}^{(T)}(a, q) + j_z E_{z;-s,-m,\alpha}^{(T)}(a, q) \right] \frac{\sin[k_0(p_0 - p_s(q))d]}{k_0(p_0 - p_s(q))}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь интегрирование производится по всей области, занятой источником (1), индекс (T) обозначает поле в среде, описываемой транспонированным тензором диэлектрической проницаемости ε^T , $N_{s,m,n}$ и $N_{s,m,\alpha}(q)$ – нормы волн, которые определяются соотношениями ортогональности, представленными в [6].

Кроме того, можно показать, что поля при отсутствии потерь в среде удовлетворяют следующим соотношениям энергетической ортогональности:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left[\mathbf{E}_{s,m,n}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_{\tilde{s},m,\tilde{n}}^*(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_{\tilde{s},m,\tilde{n}}^*(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_{s,m,n}(\mathbf{r}) \right] \mathbf{z}_0 \rho d\rho &= \frac{8}{c} W_{s,m,n} \delta_{s,\tilde{s}} \delta_{n,\tilde{n}}, \\ \int_0^\infty \left[\mathbf{E}_{s,m,\alpha}(\mathbf{r}, q) \times \mathbf{H}_{\tilde{s},m,\tilde{\alpha}}^*(\mathbf{r}, \tilde{q}) + \mathbf{E}_{\tilde{s},m,\tilde{\alpha}}^*(\mathbf{r}, \tilde{q}) \times \mathbf{H}_{s,m,\alpha}(\mathbf{r}, q) \right] \mathbf{z}_0 \rho d\rho &= \frac{8}{c} W_{s,m,\alpha}(q) \delta(q - \tilde{q}) \delta_{s,\tilde{s}} \delta_{\alpha,\tilde{\alpha}}, \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} [\mathbf{E}_{s,m,\alpha}(\mathbf{r}, q) \times \mathbf{H}_{s,m,\tilde{n}}^*(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_{s,m,\tilde{n}}^*(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_{s,m,\alpha}(\mathbf{r}, q)] \mathbf{z}_0 \rho d\rho = 0. \quad (6)$$

Здесь $\delta_{\alpha,\beta}$ – символ Кронекера, символ «*» обозначает операцию комплексного сопряжения. Заметим, что в данном случае справедливы равенства $W_{+,m,n} = -W_{-,m,n}$ и $W_{+,m,\alpha}(q) = -W_{-,m,\alpha}(q)$. С учетом этого обстоятельства и соотношений (6) полная мощность, излучаемая источником, может быть записана в виде

$$P_{\Sigma} = \sum_{s=\pm} P_s \operatorname{sgn} s, \quad (7)$$

где

$$P_s = \sum_n |a_{s,m,n}|^2 W_{s,m,n} + \sum_{\alpha=1}^2 \int_0^1 |a_{s,m,\alpha}(q)|^2 W_{s,m,\alpha}(q) dq. \quad (8)$$

Отметим, что слагаемые, стоящие под знаком суммы в выражении (7), определяют мощности, которые излучаются в положительном ($s=+$) и отрицательном ($s=-$) направлениях оси z . Вводя полное сопротивление излучения источника по формуле $R_{\Sigma} = 2P_{\Sigma}/|I_0|^2$, получаем

$$R_{\Sigma} = R_{\text{mod}} + R_{\text{cs}}, \quad (9)$$

где

$$R_{\text{mod}} = \sum_n R_n, \quad R_n = \frac{2}{|I_0|^2} (|a_{+,m,n}|^2 + |a_{-,m,n}|^2) W_{+,m,n},$$

$$R_{\text{cs}} = \int_0^1 G_{\text{cs}}(q) dq, \quad G_{\text{cs}}(q) = \frac{2}{|I_0|^2} \sum_{\alpha=1}^2 (|a_{+,m,\alpha}(q)|^2 + |a_{-,m,\alpha}(q)|^2) W_{+,m,\alpha}(q). \quad (10)$$

Здесь величины R_n и R_{cs} имеют смысл парциальных сопротивлений излучения в n -ую собственную моду и волны непрерывной части спектра, соответственно. Интегрирование в (10) производится по всем значениям q , для которых функция $p_s(q)$ является чисто действительной. Величина G_{cs} , зависящая от q , имеет смысл плотности распределения парциального сопротивления излучения R_{cs} по пространственному спектру.

Результаты численных расчетов

Парциальные сопротивления излучения источника в резонансных диапазонах частот магнитоактивной плазмы

На основе полученных выше формул были численно рассчитаны парциальные сопротивления излучения тока, параметры которого соответствуют условиям лабораторных экспериментов с геликонными источниками плазмы [2–4]. В частности, для плотности тока (1) были заданы следующие значения параметров: $a = 2,5$ см, $d = 4a$, $\omega_H a/c = 1,17$, $p_0 = 0$, $m = 1$.

На рис. 1(а) показаны парциальные сопротивления излучения R_n в отдельные собственные моды с радиальными индексами n при $\omega/\omega_H = 2,5 \cdot 10^{-2}$, когда частота

поля ω лежит в резонансной области свистового диапазона частот $\omega_{\text{ЛН}} < \omega < \omega_{\text{Н}}$, где $\omega_{\text{ЛН}} = (\omega_{\text{Н}} \Omega_{\text{Н}})^{1/2}$ – частота нижнего гибридного резонанса.

В рассматриваемом случае волновод поддерживает бесконечное число распространяющихся собственных мод. Как видно из рис. 1(а), наиболее эффективно возбуждаются моды с постоянными распространения $p_n < P = (\varepsilon - g)^{1/2} = 44,48$. Как геликонная, так и квазиэлектростатическая части полей данных мод имеют объемную структуру. Величина P показана на рис. 1(а) вертикальной пунктирной линией. При этом, как следует из расчетов, суммарное сопротивление излучения во все собственные моды составляет $R_{\text{mod}} \approx 0,52$ Ом. Кроме того, было установлено, что при заданном отношении длины и радиуса источника увеличение продольной компоненты плотности тока j_z по отношению к азимутальной компоненте j_ϕ приводит к перераспределению излучаемой мощности в моды с большими постоянными распространения $p_n > P$. Следует отметить, что в данном случае величина R_{mod} также возрастает.

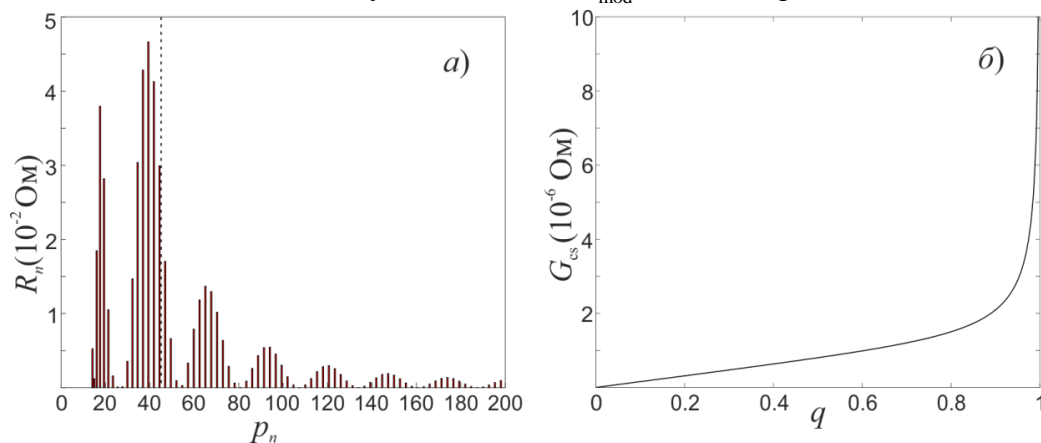


Рис. 1. а – Парциальные сопротивления излучения R_n в отдельные собственные моды с радиальными индексами n и постоянными распространения p_n ; **б** – зависимость величины G_{cs} от q при $\omega/\omega_{\text{Н}} = 2,5 \cdot 10^{-2}$, $\omega_p/\omega_{\text{Н}} = 6,95$, $\omega_{\text{ЛН}}/\omega_{\text{Н}} = 3,7 \cdot 10^{-3}$, $j_z = 0,25j_\phi$.

Распределение величины G_{cs} по пространственному спектру возбуждаемых волн показано на рис. 1(б) для тех же параметров. Сопротивление излучения в волны непрерывного спектра составляет $R_{\text{cs}} = 1,1 \cdot 10^{-6}$ Ом. Очевидно, что здесь с большим запасом выполняется неравенство $R_\Sigma \approx R_{\text{mod}} \gg R_{\text{cs}}$. Это означает, что в рассматриваемом случае практически вся излучаемая мощность идет в собственные моды волновода.

Аналогичные зависимости для величин R_n и G_{cs} показаны на рис. 2 в случае, когда частота поля лежит в интервале $\omega_p < \omega < \omega_{\text{УН}}$ (т.е. в верхнегибридном диапазоне), где $\omega_{\text{УН}} = (\omega_{\text{Н}}^2 + \omega_p^2)^{1/2}$ – частота верхнего гибридного резонанса. В этих условиях сопротивление излучения в собственные моды составляет $R_{\text{mod}} \approx 0,075$ Ом. Однако по сравнению с предыдущим случаем полное сопротивление излучения антенны определяется теперь вкладом волн непрерывного спектра ($R_\Sigma \approx R_{\text{cs}}$), для которых $R_{\text{cs}} = 62,3$ Ом.

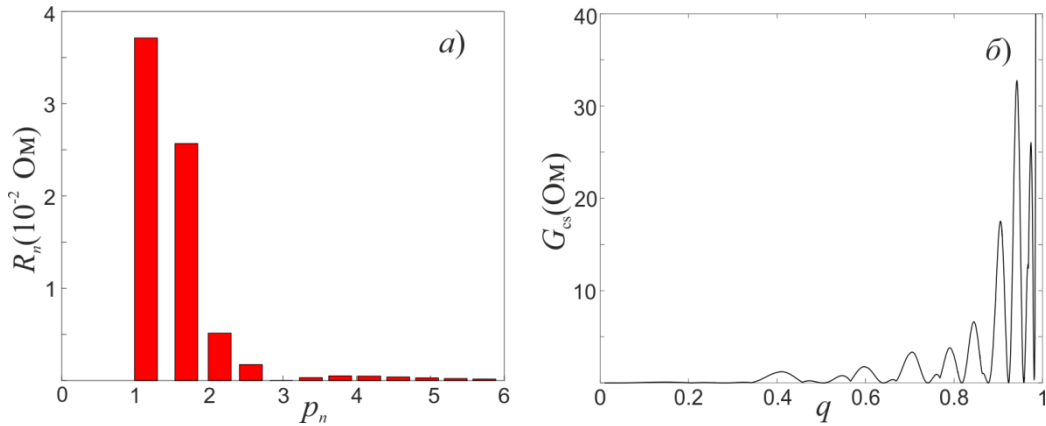


Рис. 2. То же, что и на рис. 1, но при $\omega/\omega_{UH} = 0,995$.

Сопротивление излучения в зависимости от длины источника

На рис. 3(a) показаны сопротивления излучения $R_{\text{mod}}^{(z)}$ и $R_{\text{mod}}^{(\phi)}$ источника с чисто продольным и чисто азимутальным током соответственно в зависимости от параметра d/a . Как можно видеть из рисунка, у «длинной» антенны ($d/a \gg 1$) сопротивление излучения выше в случае чисто продольного тока: $R_{\text{mod}}^{(z)} \gg R_{\text{mod}}^{(\phi)}$. Напротив, при малых значениях d/a (случай «короткой» антенны) заметно бóльшей оказывается величина $R_{\text{mod}}^{(\phi)}$.

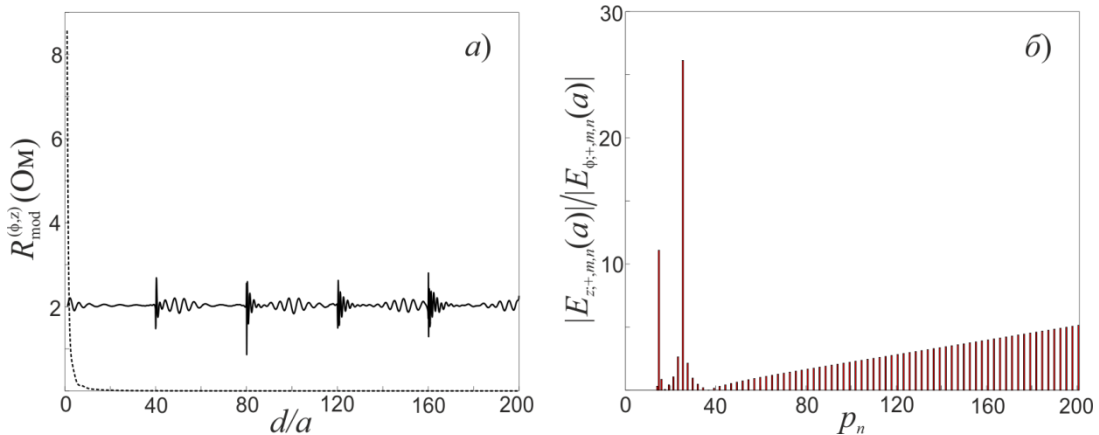


Рис. 3. а – Зависимость сопротивлений излучения $R_{\text{mod}}^{(z)}$ (сплошная линия) и $R_{\text{mod}}^{(\phi)}$ (пунктирная линия) от параметра d/a ; б – отношения абсолютных величин тангенциальных компонент полей отдельных собственных мод на поверхности цилиндра при $d=a$. Остальные параметры те же, что и на рис. 1.

На рис. 3(б) показаны отношения продольной и азимутальной компонент электрического поля на поверхности цилиндра для отдельных мод с радиальными индексами n и продольными волновыми числами p_n при $d = a$. Выбирая подходящее значение величины $p_0 = \tilde{p}$ в выражении (1), можно изменять сопротивление излучения антенны с различными распределениями электрического тока. Например, для источников, у которых $d = a$, при $p_0 = 200,7$ ($\tilde{p} \approx p_{75}$) имеем $R_{\text{mod}}^{(\phi)} = 4,82$ Ом, в то время как $R_{\text{mod}}^{(z)} = 12,32$ Ом. Напротив, как видно из рис. 3(a), при том же условии $d = a$

и однородном продольном распределении тока ($p_0 = 0$) получаем $R_{\text{mod}}^{(\phi)} = 8,56 \text{ Ом}$ и $R_{\text{mod}}^{(z)} = 2,02 \text{ Ом}$, т.е. имеет место обратное неравенство $R_{\text{mod}}^{(\phi)} > R_{\text{mod}}^{(z)}$.

Заключение

В данной работе рассмотрены характеристики излучения несимметричного тока, заданного на поверхности открытого гиротропного цилиндрического волновода. Применительно к волноводу, заполненному магнитоактивной плазмой, численно рассчитаны сопротивления излучения такого источника в нижнегибридном и верхнегибридном диапазонах частот. Показано, что в нижнегибридном диапазоне практически вся излучаемая мощность уходит в собственные моды волновода (волны дискретной части спектра), в то время как в верхнегибридном диапазоне сопротивление излучения антенны определяется вкладом волн непрерывной части спектра. Установлено, что величины сопротивлений излучения антенн с чисто азимутальными или чисто продольными компонентами электрического тока существенно зависят от его распределения по продольной координате.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № 3.1358.2017/4.6)

Литература

1. Helliwell R. A. Whistlers and related ionospheric phenomena. Mineola: Dover Publications, 2006. 368 p.
2. Arnush D., Chen F. F. Generalized theory of helicon waves. II. Excitation and absorption // Phys. Plasmas. 1998. V. 5, No. 5. P.1239–1254.
3. Caneses J. F., Blackwell B. D., Piotrowicz P. Helicon antenna radiation patterns in a high-density hydrogen linear plasma device // Phys. Plasmas. 2017. V. 60, No. 11. P.113513.
4. Buttenschön B., Fahrenkamp N., Grulke O. A high power, high density helicon discharge for the plasma wakefield accelerator experiment AWAKE // Plasma Phys. Control. Fusion. 2018. V. 60, No. 7. P. 075005.
5. Kudrin A. V., Petrov E. Yu., Kyriacou G. A., Zaboronkova T. M. Electromagnetic radiation from sources embedded in a cylindrically stratified unbounded gyrotropic medium // PIER B. 2009. V. 12. P. 297–331.
6. Es'kin V. A., Kudrin A. V. A new method for constructing an orthogonal system of eigenwaves of an open cylindrical waveguide surrounded by an isotropic medium // PIERS Proc. 2017. P. 843–848.
7. Kondrat'ev I. G., Kudrin A. V., Zaboronkova T. M. Electrodynamics of density ducts in magnetized plasmas. Amsterdam: Gordon and Breach, 1999. 288 p.