Уравнения Гельмгольца гиротропных эллиптических волноводов при касательном намагничивании

Д.Ш. Ширапов, Г.Б. Итигилов

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, 670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В. E-mail: shir48@mail.ru

Из ранее полученных обобщенных уравнений Гельмгольца для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейной формой поперечного сечения при произвольном намагничивании выведены частные уравнения Гельмгольца для гиротропных эллиптических волноводов при касательном намагничивании.

From the previously obtained generalized Helmholtz equations for gyrotropic waveguides with orthogonal-curvilinear cross-section at arbitrary magnetization, the partial Helmholtz equations for gyrotropic elliptic waveguides at tangential magnetization are derived.

Введение

В работе [1] были получены обобщенные уравнения Гельмгольца для гиротропных волноводов с произвольной ортогональной формой поперечного сечения при произвольном намагничивании, решением системы дифференциальных уравнений Максвелла [2], в предположении устоявшегося во времени процесса без наведенных токов и зарядов

$$\begin{cases} rot\overline{H} = j\omega\varepsilon\overline{E}; \\ rot\overline{E} = -j\omega\overline{B}; \\ div\overline{E} = 0; \\ div\overline{B} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\overline{H}$ *и* $\overline{E}$ – напряженности магнитного и электрического полей,

$\overline{B} = \tilde{\mu}\overline{H}$ *и* $\overline{D}$ - магнитная и электрическая индукции,

j -мнимая единица;

ε - абсолютная диэлектрическая проницаемость феррита,

ω –циклическая частота,

$$\tilde{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & jk & jl \\ -jk & \mu_{22} & jm \\ -jl & -jm & \mu_{33} \end{bmatrix} \text{- тензор магнитной проницаемости феррита [3],} \tag{2}$$

где $l, m, k, \mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33}$ - компоненты тензора магнитной проницаемости феррита.

Система дифференциальных уравнений (1) решалась с использованием аппарата тензорного исчисления, позволяющего для гиротропных волноводов с произвольными криволинейными контурами ортогонального поперечного сечения, описывать изменения кривизны локального базиса и магнитную проницаемость феррита с помощью ковариантного дифференцирования и тензором второго порядка.

В предположении, что электромагнитная волна распространяется вдоль продольной координаты, совпадающей с осью Z декартовой системы координат были получено обобщенное уравнение Гельмгольца гибридной НЕ- волны для гиротропного волновода с ортогонально-криволинейной формой поперечного сечения при произвольном намагничивании [1]

$$\Delta_{11}H_z+\Delta_{22}H_z+j\gamma\left(\delta_1H_1+\delta_2H_2\right)-j\omega^2\varepsilon\left(lH_1+mH_2\right)+\omega^2\varepsilon\mu_{33}H_z=0, \qquad (3)$$

где $\Delta_{11}=\delta_1\nabla_1=\frac{1}{h_1^2}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}+\mathit{\Gamma}_{21}^2-\mathit{\Gamma}_{11}^1\right)\frac{\partial}{\partial q_1}$;

$\delta_1=\frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}+\mathit{\Gamma}_{21}^2\right)$;

$\Delta_{22}=\delta_2\nabla_2=\frac{1}{h_2^2}\left(\frac{\partial}{\partial q_2}+\mathit{\Gamma}_{12}^1-\mathit{\Gamma}_{22}^2\right)\frac{\partial}{\partial q_2}$;

$\delta_2=\frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial}{\partial q_2}+\mathit{\Gamma}_{12}^1\right)$;

$\nabla_i=\frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial q_i}, i=1,2$;

$H_3=H_Z$ - продольная, H_1 и H_2 - поперечные компоненты магнитного поля;

γ - постоянная распространения;

h_1, h_2 - коэффициенты Ламэ [4];

q_1 , q_2 -обобщенные поперечные координаты;

$\mathit{\Gamma}_{12}^1$, $\mathit{\Gamma}_{21}^2$- символы Кристоффеля [5];

Коэффициенты Ламэ h_i, символы Кристоффеля $\mathit{\Gamma}_{12}^1$ и $\mathit{\Gamma}_{21}^2$, дифференциальные операторы I-го δ_i, ∇_i и II-го порядков $\Delta_{11},\Delta_{22},\Delta_{12}$ для эллиптических волноводов имеют вид [6]:

$$\begin{cases} h_1=h_2=ed;\ \ h_3=h_Z=1; \nabla_1=\frac{1}{ed}\frac{\partial}{\partial\xi}; \nabla_2=\frac{1}{ed}\frac{\partial}{\partial\varphi};\\ \delta_1=\frac{1}{ed}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{Sh2\xi}{2d^2}\right); \delta_2=\frac{1}{ed}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{sin\,2\varphi}{2d^2}\right);\\ \mathit{\Gamma}_{12}^1=\mathit{\Gamma}_{22}^2=\frac{sin\,2\varphi}{2d^2};\ \ \mathit{\Gamma}_{21}^2=\mathit{\Gamma}_{11}^1=\frac{Sh2\xi}{2d^2};\\ \Delta_{11}=\frac{1}{e^2d^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}; \Delta_{22}=\frac{1}{e^2d^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}; \Delta_{12}=\frac{1}{e^2d^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \end{cases} \qquad (4)$$

где e - фокус эллипса;

$d^2=ch^2\xi-\cos^2\varphi$;

ξ,φ – поперечные координаты эллиптической системы координат.

Обобщенное уравнение Гельмгольца гибридной ЕН-волны для гиротропного волновода с ортогонально-криволинейной формой поперечного сечения при произвольном намагничивании имеет вид [1]

$$\begin{aligned}&\mu_{11}\Delta_{11}E_z+\mu_{22}\Delta_{22}E_z+j\gamma\left(\mu_{11}\delta_1E_1+\mu_{22}\delta_2E_2\right)+\omega\left(\mu_{11}m\delta_1-\mu_{22}l\delta_2\right)H_z+\\&+\gamma k\omega\left(-lH_1-mH_2-j\mu_{33}H_z\right)-\omega^2\varepsilon\left(k^2-\mu_{11}\mu_{22}\right)E_z+j\omega\left(lk\delta_1+mk\delta_2\right).H_z=0,\end{aligned} \qquad (5)$$

где E_1, E_2 - поперечные компоненты электрического поля;

$E_3=E_Z$ - продольная компонента электрического поля;

Уравнения Гельмгольца НЕ- волны при касательном намагничивании

При касательном намагничивании компоненты тензора магнитной проницаемости феррита (2) примут вид [3]:

$$\mu_{22} = \mu_{\|};\ \mu_{11} = \mu_{33} = \mu;\ k = m = 0;\ l \neq 0. \qquad (6)$$

С учетом (6) формула (3) примет вид

$$\Delta_{11} H_Z + \Delta_{22} H_Z + j\gamma(\delta_1 H_1 + \delta_2 H_2) - j\omega^2 \varepsilon l H_1 + \omega^2 \varepsilon \mu H_Z = 0. \qquad (7)$$

Поперечные компоненты электромагнитных волн в гиротропных волноводах с ортогонально-криволинейной формой поперечного сечения при касательном намагничивании были получены в [6]:

$$\begin{cases} E_1 = -\dfrac{j\gamma}{b^2}\left\{\nabla_1 E_Z + \dfrac{\omega\mu_{\|}}{\gamma}\nabla_2 H_Z\right\}, \\ E_2 = -\dfrac{j\gamma}{a^2}\left\{\nabla_2 E_Z - \left(\dfrac{\omega\mu}{\gamma}\nabla_1 + \omega l\right) H_Z\right\}, \\ H_1 = \dfrac{j\gamma}{a^2}\left\{\dfrac{\omega\varepsilon}{\gamma}\nabla_2 E_Z - \left(\nabla_1 + \dfrac{\omega^2 \varepsilon l}{\gamma}\right) H_Z\right\}, \\ H_2 = -\dfrac{j\gamma}{b^2}\left\{\dfrac{\omega\varepsilon}{\gamma}\nabla_1 E_Z + \nabla_2 H_Z\right\}, \end{cases} \qquad (8)$$

где $a^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - \gamma^2$; $b^2 = \omega^2 \varepsilon \mu_{\|} - \gamma^2$.

Далее подставив выражения для поперечных компонент H_1 и H_2 из системы (8) в формулу (7), и, использовав (4) получим уравнение Гельмгольца гибридных НЕ-волн для гиротропных эллиптических волноводов при касательном намагничивании

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 H_Z}{\partial \xi^2} + \frac{\mu_{\|}}{\mu}\frac{a^2}{b^2}\frac{\partial^2 H_Z}{\partial \varphi^2} + e^2 d^2\left(c^2 + \gamma\frac{l}{\mu}\frac{sh2\xi}{2ed^3}\right) H_Z = \\ &= \frac{\gamma}{\omega\mu}\frac{b^2 - a^2}{b^2}\frac{\partial^2 E_Z}{\partial \xi \partial \varphi} - \omega\varepsilon\frac{l}{\mu} ed \frac{\partial E_Z}{\partial \varphi}, \end{aligned} \qquad (10)$$

где $c^2 = \omega^2 \varepsilon \dfrac{\mu^2 - l^2}{\mu} - \gamma^2$.

Уравнения Гельмгольца ЕН- волны при касательном намагничивании

Для случая касательного намагничивания с учетом (6), общее уравнение Гельмгольца гибридной ЕН-волны для гиротропного волновода с ортогонально-криволинейной формой поперечного сечения при произвольном намагничивании (5) примет вид

$$\mu\Delta_{11} E_Z + \mu_{\|}\Delta_{22} E_Z + j\gamma(\mu\delta_1 E_1 + \mu_{\|}\delta_2 E_2) - \omega\mu_{\|} l \delta_2 H_Z + \omega^2 \varepsilon \mu_{\|}\mu E_Z = 0. \qquad (11)$$

Далее подставив выражения для поперечных компонент E_1 и E_2 из системы (8) в формулу (11), и использовав выражение (4), получим уравнение Гельмгольца гибридных ЕН-волн для гиротропных эллиптических волноводов при касательном намагничивании

$$\begin{cases} \frac{a^2}{b^2}\frac{\partial^2 E_Z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 E_Z}{\partial \varphi^2} + a^2 e^2 d^2 E_Z = \frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\frac{b^2 - a^2}{b^2}\frac{\partial^2 H_Z}{\partial \xi \partial \varphi} + \\ + \omega led\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{sin\, 2\varphi}{2d^2}\right) H_Z . \end{cases} \tag{12}$$

Основные выводы таковы:

1. Получено уравнение Гельмгольца гибридной НЕ- волны (10) для гиротропного эллиптического волновода при касательном намагничивании;

2. Получено уравнение Гельмгольца гибридной ЕН- волны (12) для гиротропного эллиптического волновода при касательном намагничивании;

3. Постановка и последующие решения краевых задач для полученных уравнения Гельмгольца (10) и (12) дают возможность построения наиболее полной математической модели распространения электромагнитных волн в гиротропных эллиптических волноводах.

Литература

1. Ширапов Д.Ш., Итигилов Г.Б. Обобщенные уравнения Гельмгольца гиротропных волноводов произвольной формы поперечного сечения // Материалы II Всероссийской научной конференции «Современные проблемы дистанционного зондирования, радиолокации, распространения и дифракции волн», г. Муром. 26-28 июня 2018 г. С. 209-219.

2. Микаэлян А.Л. Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах // Л.: Госэнергоиздат, 1963. 664 с.

3. Неганов В.А., Нефедов Е.И., Яровой Г.П. Современные методы проектирования линий передач и резонаторов сверх- и крайне высоких частот. -М.: Педагогика-Пресс, 1998.- 328с.

4. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров // М:Изд. «Наука»,1967. 780 с.

5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике // М.: Наука, 1973. 831 с.

6. Итигилов Г.Б. Математическое моделирование распространения электромагнитных волн в ограниченных гиротропных областях произвольной формы // Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Бурятский государственный университет – Улан-Удэ, 2014. – 146 с.