Адаптивная обработка сигналов: основы и некоторые приложения

В. И. Джиган

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем проектирования в микроэлектронике Российской академии наук (ИППМ РАН)
124365 Москва, Зеленоград, ул. Советская, дом 3
E-mail: djigan@ippm.ru

В лекции рассматриваются математические открытия, предшествовавшие появлению адаптивной обработки сигналов. Приведены примеры приложений адаптивных фильтров. Указаны математические методы, используемые при адаптивной обработке сигналов. Перечислены основные разновидности алгоритмов адаптивной фильтрации. Обсуждаются особенности адаптивной обработки нестационарных сигналов. Обозначены дальнейшие пути развития теории адаптивной обработки сигналов.
Ключевые слова: адаптивная обработка сигналов, адаптивный фильтр, эхокомпенсация, выравнивание каналов, антенная решетка, LMS, NLMS, RLS

Adaptive signal processing: fundamentals and some applications

V. I. Djigan

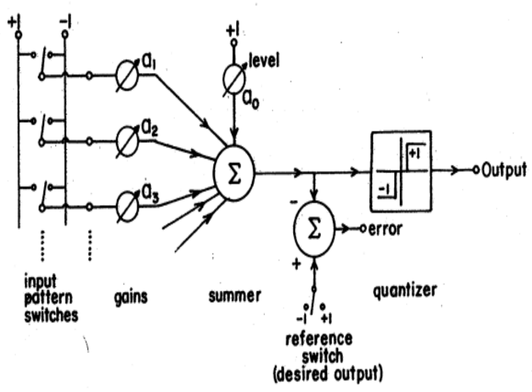
Federal State-Funded Institution of Science Institute for Design Problems in Microelectronics of Russian Academy of Sciences (IPPM RAS)

The lecture considers mathematic discoveries, which preceded the adaptive signal processing appearance. The examples of the adaptive filter applications are presented. The mathematical methods, used in adaptive signal processing, are indicated. The main sorts of adaptive filtering algorithms are listed. The specific features of adaptive processing of non-stationary signals are discussed. The further ways of evolution of adaptive signal processing theory are denoted.
Keywords: adaptive signal processing, adaptive filter, echocancelation, channel equalization, LMS, NLMS, RLS

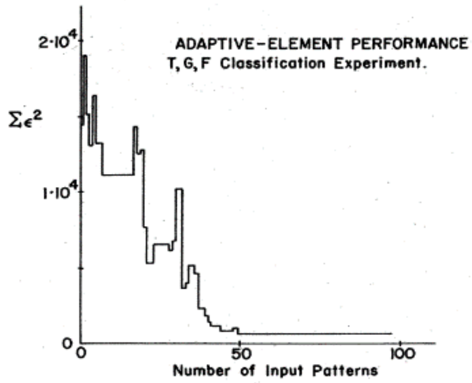
Введение

Адаптивная обработка сигналов – это передовая область современной цифровой обработки сигналов (ЦОС, Digital Signal Processing, DSP). Тем не менее, адаптивная обработка сигналов, под которой обычно понимается адаптивная фильтрация, уходит корнями в далекое прошлое [1]. Ниже приведены лишь несколько примеров. Метод Ньютона решения нелинейных уравнений является основой одноименного алгоритма адаптивной фильтрации. Широко используемый нормализованный алгоритм по критерию наименьшего квадрата (Normalized Least Mean Square, NLMS) представляет собой упрощенную версию алгоритма Ньютона. Согласно историческим данным, метод наименьших квадратов (Least Squares, LS) был придуман для сглаживания результатов физических экспериментов знаменитым математиком Гауссом, когда ему было восемнадцать лет и он готовился к поступлению в колледж. На основе этого метода был разработан и исследован широкий класс адаптивных алгоритмов, известных как рекурсивные алгоритмы по критерию наименьших квадратов (Recursive, Least Squares, RLS). В первой половине 20-го века эти и другие математические методы использовали Норберт Винер (Norbert Wiener, США), Андрей Колмогоров (СССР), Марк Крейн (СССР), Норман Левинсон (Norman Levinson, США) и другие ученые для разработки теории оптимального оценивания [2], которая предшествовала адаптивной обработке сигналов.

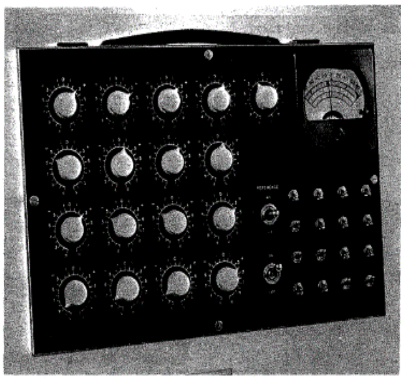
Однако первый адаптивный фильтр (рис. 1) был разработан и исследован только в конце 50-х годов уже прошлого века профессором Стэндфордского университета (США) Бернардом Уидроу (Bernard Widrow) [3]. Работа этого фильтра базировалась на алгоритме по критерию наименьшего квадрата (Least Mean Square, LMS) [4]. С тех пор адаптивные фильтры на основе этого алгоритма широко используются на практике, поскольку для их реализации требуются наименьше вычислительные ресурсы по сравнению с другими адаптивными алгоритмами. Эти фильтры описываются всего лишь двумя тривиальными уравнениями. Благодаря этому, они просты в понимании и реализации.



а)



б)



в)

Рис. 1. Первый адаптивный фильтра [3]: а) архитектура, б) переходный процесс, в) рисунок

Сегодня адаптивные фильтры используются в современном электронном оборудовании [5], технические параметры которого зачастую невозможно достичь без таких фильтров. Для эффективной реализации адаптивных фильтров с помощью современных цифровых устройств, важно понимать как такие фильтры устроены и работают.

Целью настоящей лекции является введение в теорию адаптивной обработки сигналов, т.е. знакомство с основными принципами построения адаптивных систем, с основными математическими приемами и алгоритмами адаптивной фильтрации на их основе, а также с некоторыми приложениями адаптивных фильтров, которые сегодня широко используются в качестве узлов оборудования современных систем радиолокации, навигации, связи и бытовой техники.

Структуры и применение адаптивных фильтров

На практике существует много задач ЦОС, для которых параметры фильтров, используемых в этих задачах, нельзя определить заранее. В таких случаях необходимо использовать фильтры с изменяющимися параметрами. Адаптивный фильтр (рис. 2) представляет собой такого рода фильтр с изменяемыми (настраиваемыми) параметрами, в качестве которых выступают весовые коэффициенты, вычисляемые в процессе работы фильтра.

Адаптивный фильтр может быть одноканальным (рис. 3) или многоканальным (рис. 4). Он может иметь действительные или комплексные весовые коэффициенты, что зависит от задачи, которую решает фильтр. Сегодня существует множество адаптивных устройств, основной составляющей которых является адаптивный фильтр. Это электрические и акустические компенсаторы эха (рис. 5 – рис. 7), эквалайзеры каналов связи (рис. 8), шумоподавители (рис. 9), адаптивные антенные решетки (рис. 10) и ряд других.

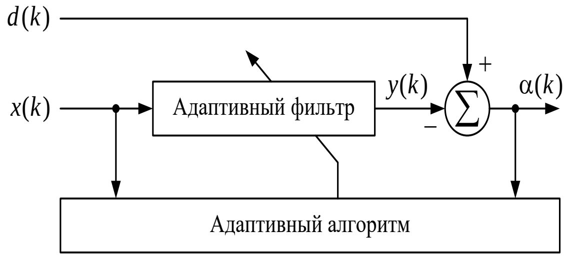


Рис. 2. Адаптивный фильтр

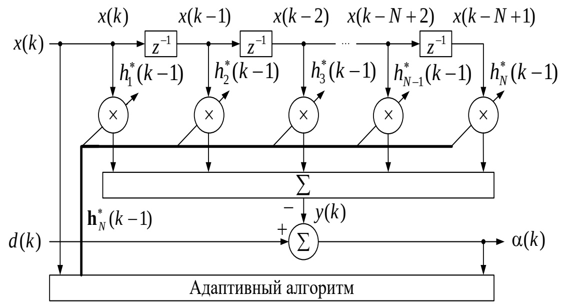


Рис. 3. Одноканальный адаптивный фильтр

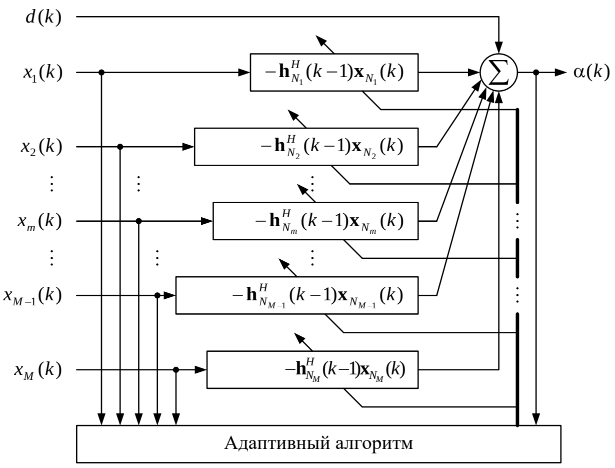


Рис. 4. Многоканальный адаптивный фильтр

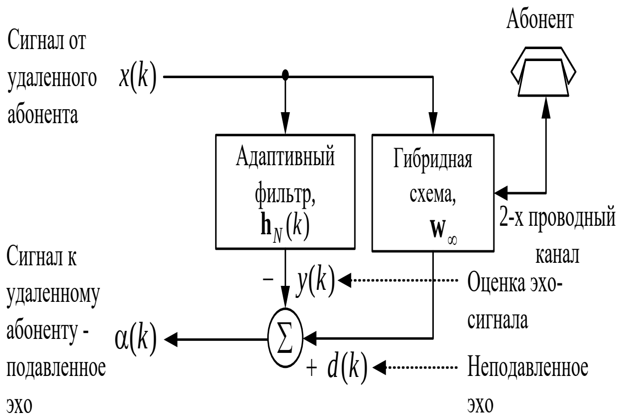


Рис. 5. Подавление сигналов электрического эха в телефонных сетях

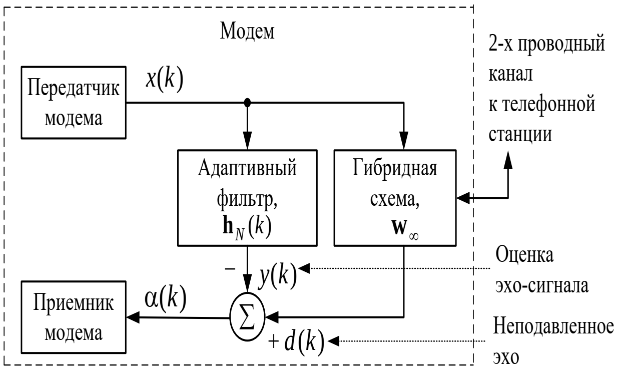


Рис. 6. Подавление сигналов электрического эха в модемах

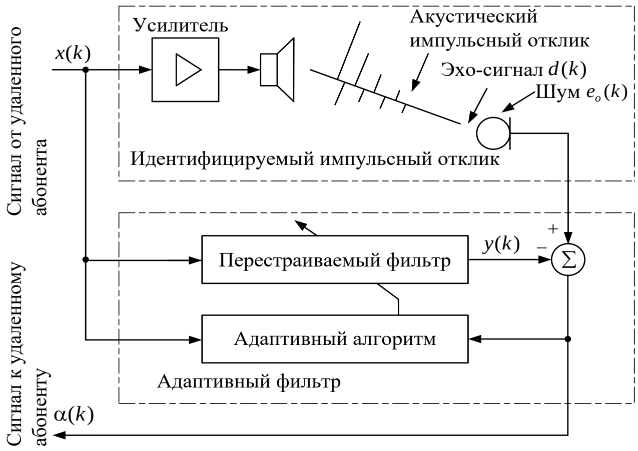


Рис. 7. Подавление сигналов акустического эха

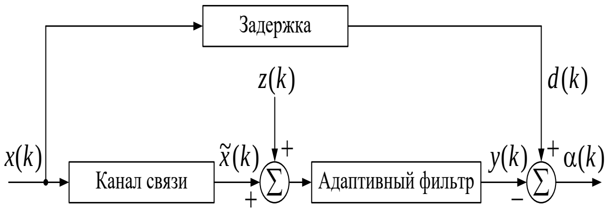


Рис. 8. Адаптивный эквалайзер канала связи

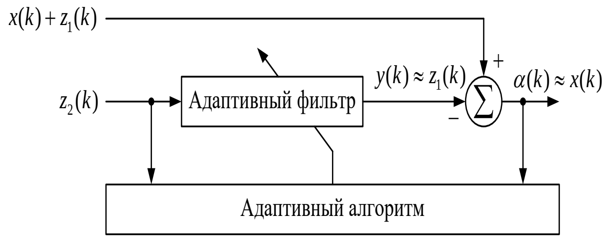


Рис. 9. Адаптивное шумоподавление

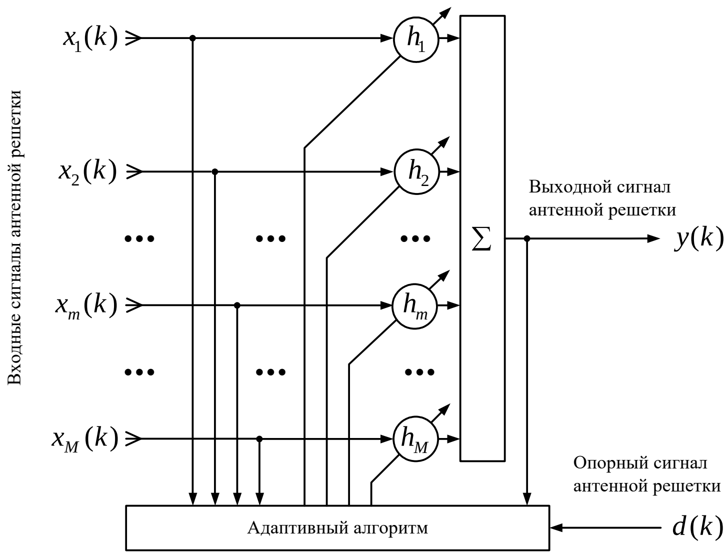


Рис. 10. Адаптивная антенная решетка

В зависимости от алгоритма, используемого для расчета весовых коэффициентов, адаптивные фильтры демонстрируют разные характеристики. Чтобы понять, почему это происходит, необходимо ознакомиться с основами адаптивной обработки сигналов. Знание этих основ также важно для синтеза новых алгоритмов адаптивной фильтрации, анализа свойств алгоритмов и исследования алгоритмов в конкретных приложениях.

Основы адаптивной фильтрации

Адаптивная обработка сигналов основана на теории винеровской фильтрации. Фильтр Винера – это линейный сумматор (рис. 11), весовые коэффициенты которого обеспечивают наименьшую среднеквадратическую ошибку между требуемым и выходным сигналами сумматора по сравнению с любыми другими значениями этих коэффициентов.

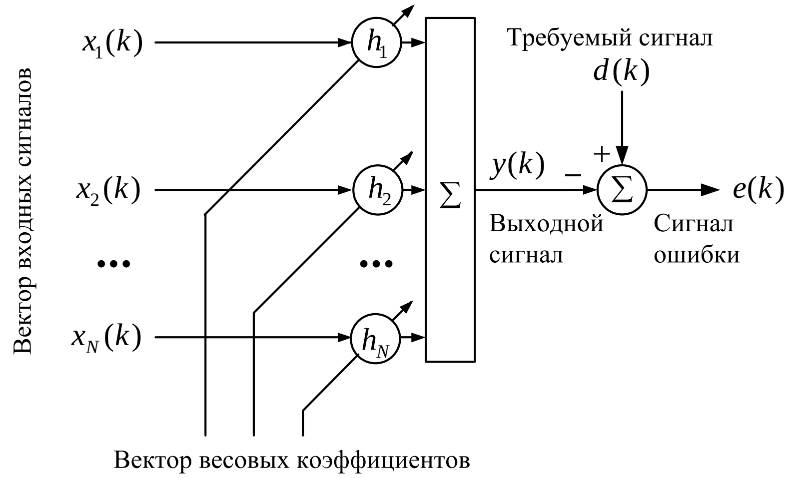


Рис. 11. Фильтр Винера

Наименьшая среднеквадратичная ошибка как функция весовых коэффициентов адаптивного фильтра представляет собой многомерный параболоид, см. пример на рис. 12. Вычислительная сложность алгоритма поиска минимума этой функции с помощью LS-метода обусловлена сложностью оценки корреляционной матрицы входных сигналов линейного сумматора и её обращения. Поэтому методы поиска этого минимума обычно используют более простые процедуры, а именно градиентные, основанные на алгоритмах Ньютона или наискорейшего спуска, которые работают только с оценками минимизируемой функции стоимости.

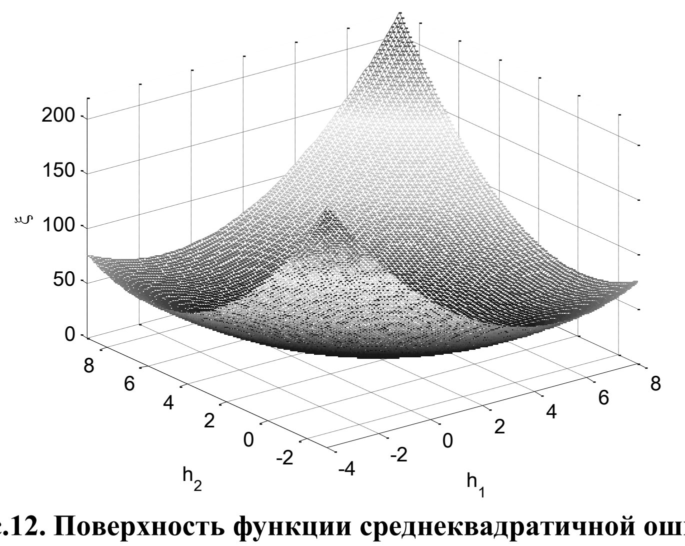


Рис.12. Поверхность функции среднеквадратичной ошибки

Градиентные алгоритмы адаптивной фильтрации

Контуры срезов функции стоимости (рис. 12), параллельных плоскости весовых коэффициентов адаптивного фильтра, показаны на рис. 13 и рис. 14.

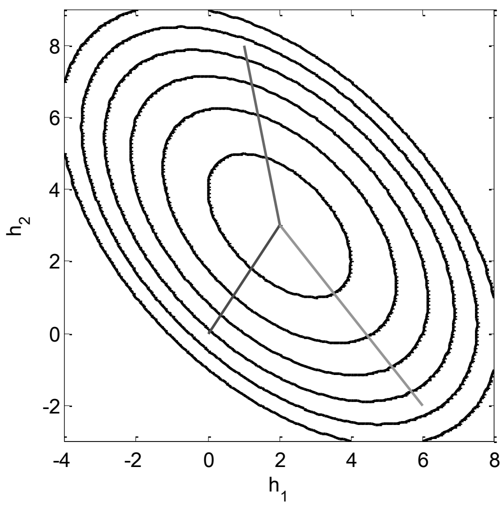


Рис. 13. Поведение алгоритма Ньютона

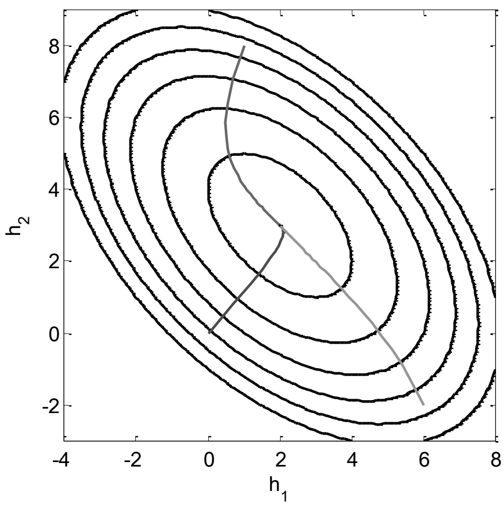


Рис. 14. Поведение алгоритма наискорейшего спуска

Эти контуры имеют форму эллипсов и называются линиями уровня. На каждой итерации алгоритма Ньютона направление поиска минимума функции стоимости направлено точно на этот минимум (рис. 13). В алгоритме же наискорейшего спуска (рис. 14) движение к минимуму осуществляется в направлениях, противоположных направлениям векторов градиента функции стоимости. Эти направления ортогональны касательным к линиям уровня.

Адаптивный алгоритм по критерию наименьшего квадрата

На практике поиск (вычисление) весовых коэффициентов адаптивного фильтра часто выполняется с помощью упрощенной версии алгоритма наискорейшего спуска, которая называется LMS-алгоритмом. Подобно алгоритму наискорейшего спуска, LMS-алгоритм также является итерационным.

В LMS-алгоритме точный градиент заменяется его оценкой, для которой используется только одна выборка входных сигналов и ошибки между требуемым и выходным сигналами адаптивного фильтра. В результате траектория движения весовых коэффициентов (серые кривые на рис. 15) лишь в среднем повторяет траекторию (черная кривая) алгоритма наискорейшего спуска. LMS-алгоритм также демонстрирует несколько большую среднеквадратичную ошибку в установившемся состоянии (серая кривая на рис. 16) по сравнению с алгоритмом наискорейшего спуска (черная кривая). Величина избыточной среднеквадратичной ошибки зависит от собственных значений корреляционной матрицы входных сигналов адаптивного фильтра, величины шага сходимости алгоритма и дисперсии аддитивного шума, который обычно присутствует на входе требуемого сигнала.

В LMS-алгоритме увеличение шага сходимости уменьшает длительность переходного процесса, но увеличивает избыточную среднеквадратичную ошибку. Это продемонстрировано на рис. 17, где показаны два переходных процесса для двух значений шага сходимости (величина шага для кривой 1 меньше, чем для кривой 2). Минимальное значение среднеквадратичной ошибки в эксперименте (рис. 17) равно единице, что позволяет легко оценить величину избыточной среднеквадратичной ошибки.

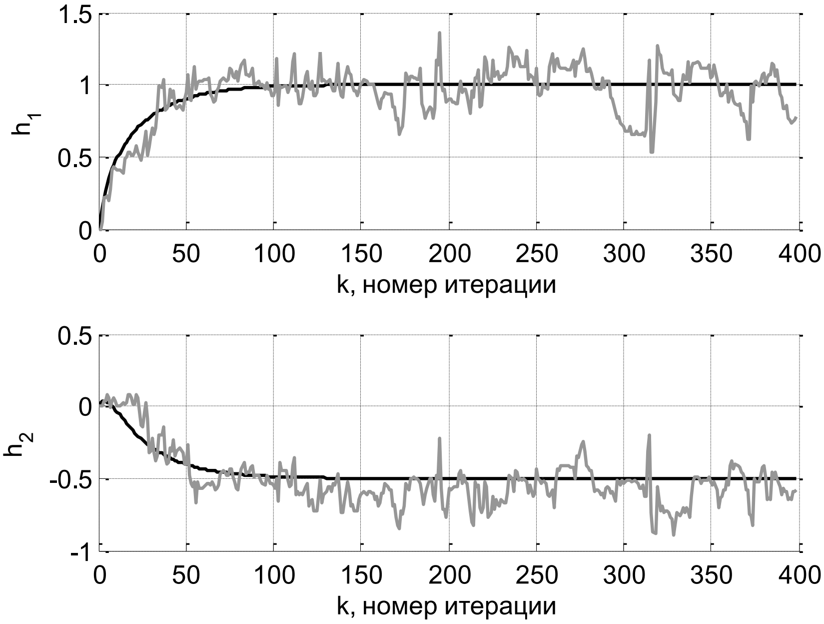


Рис. 15. Поведение алгоритма наискорейшего спуска и LMS-алгоритма, весовые коэффициенты

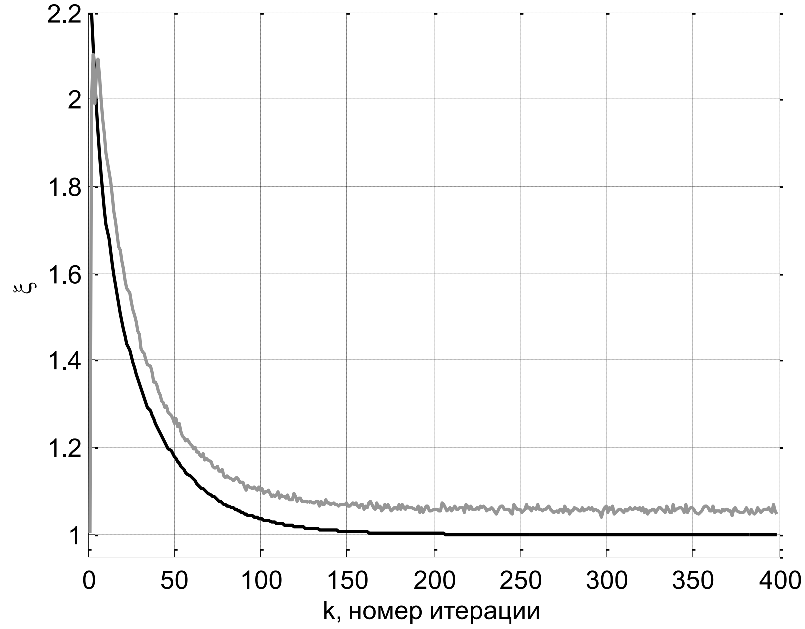


Рис. 16. Поведение алгоритма наискорейшего спуска и LMS-алгоритма, среднеквадратичная ошибка

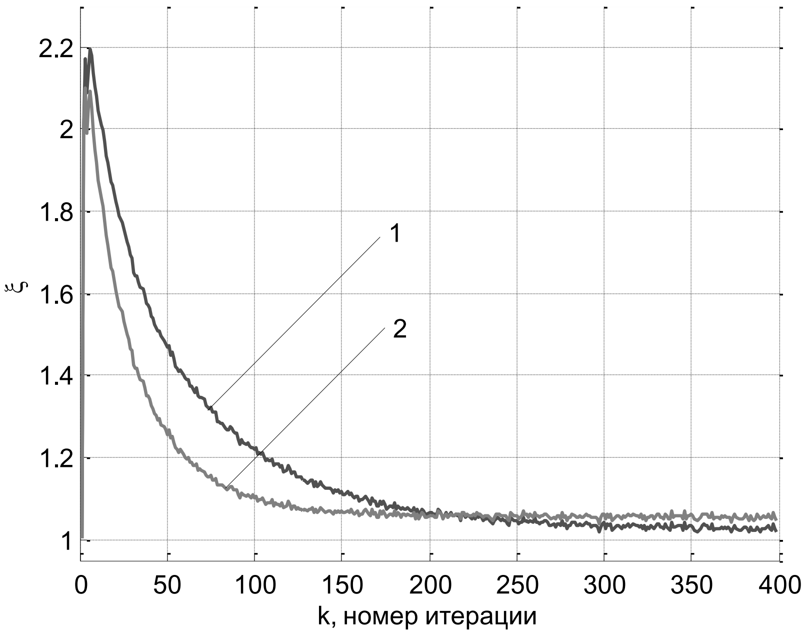


Рис. 17. Поведение LMS-алгоритма, переходный процесс в терминах среднеквадратичной ошибки

Рекурсивные адаптивные алгоритмы по критерию наименьших квадратов

Более эффективными, но и более сложными в вычислительном отношении по сравнению с градиентными алгоритмами являются RLS-алгоритмы, которые минимизируют сумму квадратов ошибок между требуемым и выходным сигналами адаптивного фильтра, накопленную на интервале наблюдения. Минимизация обеспечивается путем решения системы линейных уравнений. Квадратичная вычислительная сложность RLS-алгоритмов – это цена их большей эффективности по сравнению с простыми градиентными алгоритмами, сложность которых линейная.

Существуют RLS-алгоритмы, основанные на использовании леммы об обращении матриц (Matrix Inversion Lemma, MIL) [6], прямого и обратного QR-разложении и преобразовании Хаусхолдера [7]. MIL – это лемма для вычисления обратной матрицы, которую можно представить в виде суммы двух матриц: корреляционной матрицы, накопленной на предыдущих итерациях, и добавки, обусловленной отсчетами сигналов на текущей итерации. Такая форма матрицы позволяет разработать рекурсивные алгоритмы вычисления обратной матрицы. Поэтому данный класс алгоритмов адаптивной фильтрации называется «RLS», что означает «Recursive Least Squares».

MIL RLS-алгоритм в основном ориентирован на программную реализацию, а QR RLS-алгоритмы – на аппаратную реализацию. Это вызвано регулярной структурой вычислений в QR RLS-алгоритмах (рис. 18 и рис. 19), что способствует их эффективной аппаратной реализации. Вычислительная сложность большинства RLS-алгоритмов является квадратичной функцией числа весовых коэффициентов адаптивного фильтра.

NLMS- и LMS-алгоритмы также можно рассматривать как частные случаи или результаты упрощения MIL RLS-алгоритма, что может служить объяснением более низкой эффективности NLMS- и LMS-алгоритмов по сравнению с RLS-алгоритмами. Форма и длительность переходного процесса RLS-алгоритмов не зависят от числа обусловленности корреляционной матрицы (отношения максимального собственного значения к минимальному), но в LMS-алгоритме с фиксированным шагом сходимости такая зависимость существует, см. рис. 20.

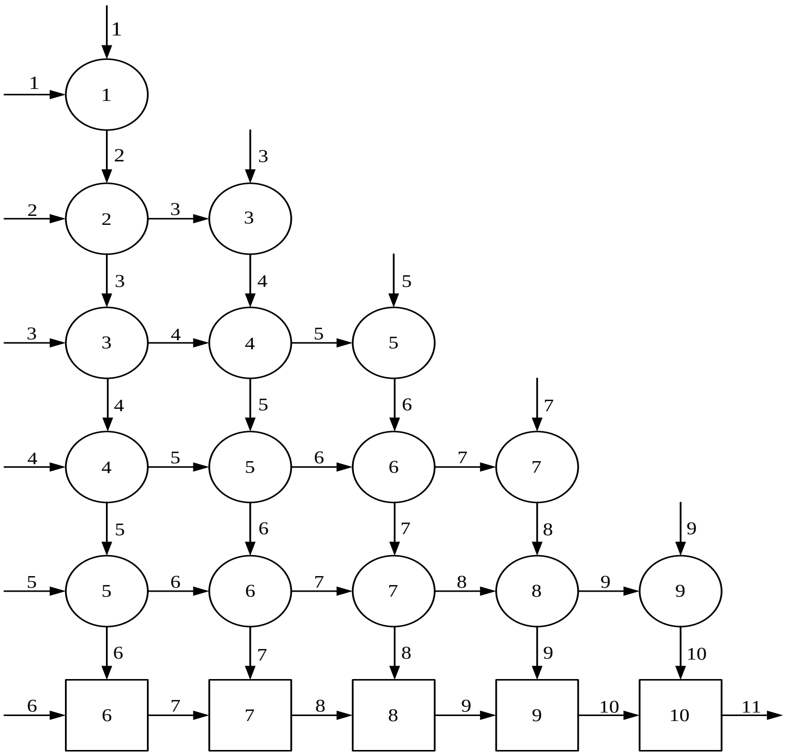


Рис. 18. RLS-алгоритм на основе обратного QR-разложения

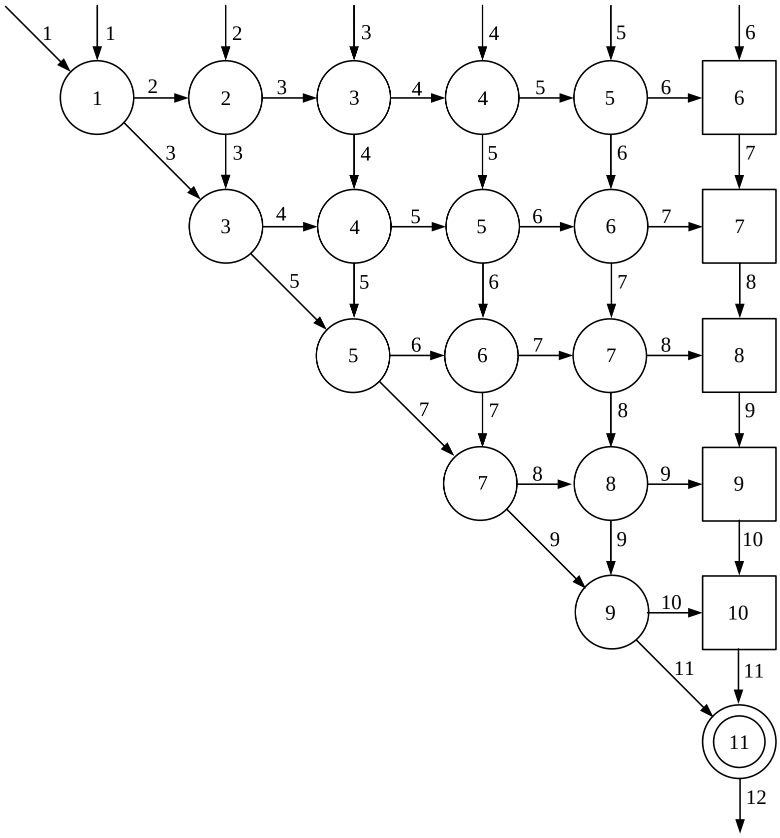


Рис. 19. RLS-алгоритм на основе прямого QR-разложения

На рис. 20 показаны кривые переходных процессов LMS-алгоритма при двух различных значениях числа обусловленности корреляционной матрицы и фиксированном шаге сходимости. Это 1 и 2 кривые. Число обусловленности корреляционной матрицы сигналов в случае кривой 1 больше, чем в случае кривой 2. Рис. 20 демонстрирует, что в одинаковых условиях кривые 3 и 4 для RLS-алгоритма совпадают. Это подтверждает, что поведение RLS-алгоритма не зависит от числа обусловленности корреляционной матрицы. Кроме того, рис. 20 показывает, что RLS-алгоритм более эффективен, чем LMS-алгоритм, что означает меньшую длительность переходного процесса и меньшую среднеквадратичную ошибку установившемся состоянии.

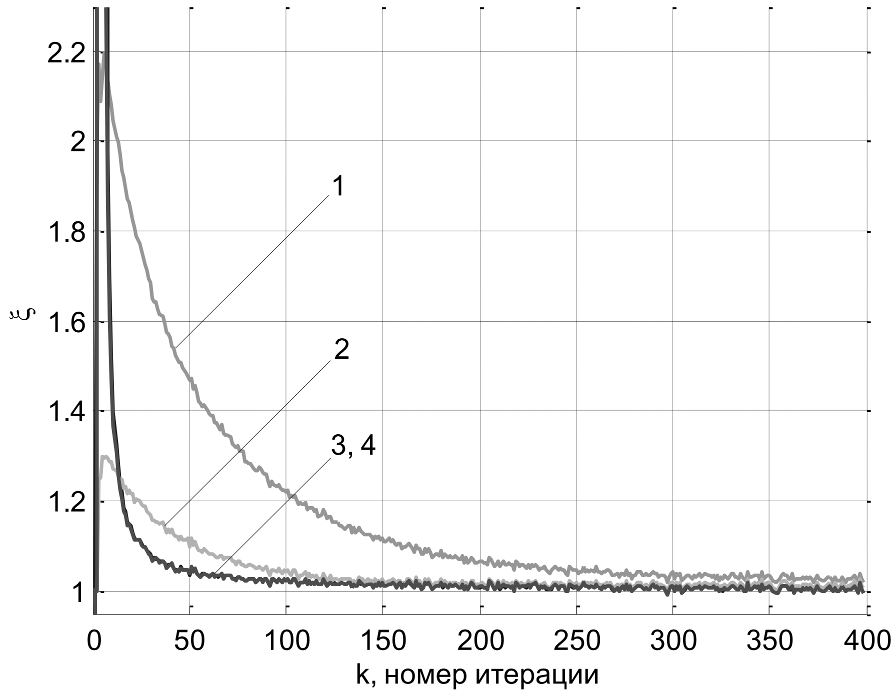


Рис. 20. Поведение LMS- и RLS-алгоритмов

Быстрые RLS-алгоритмы

Таким образом, RLS-алгоритмы одновременно эффективны и сложны в вычислительном плане. Эта сложность может быть уменьшена в быстрых RLS-алгоритмах [1, 8]. Разработка таких алгоритмов основана на свойстве инвариантности к сдвигу сигналов в линейном сумматоре и на теории линейного предсказания. Поскольку матричные операции отсутствуют в быстрых RLS-алгоритмах, их вычислительная сложность является линейной функцией числа весовых коэффициентов адаптивного фильтра.

Адаптивные фильтры на базе лестничных RLS-алгоритмов (рис. 21 и рис. 22) также являются быстрыми. Регулярная структура вычислений в таких алгоритмах способствует эффективной аппаратной реализации адаптивных фильтров на их основе [9].

Все RLS-алгоритмы, включая их быстрые версии, являются математически эквивалентными друг другу. Это означает, что при правильной инициализации [10] и реализации в арифметике с плавающей точкой, адаптивные фильтры, основанные на разных RLS-алгоритмах и имеющие одинаковое число весовых коэффициентов, демонстрируют одинаковое поведение на каждой итерации при обработке одних и тех же сигналов. Различие в RLS-алгоритмах проявляется при их реализации в арифметике с фиксированной точки, т.е. при ограниченной точности вычислений, поскольку разные алгоритмы имеют разное число и вид арифметических операций и разный характер накопления ошибок вычислений.

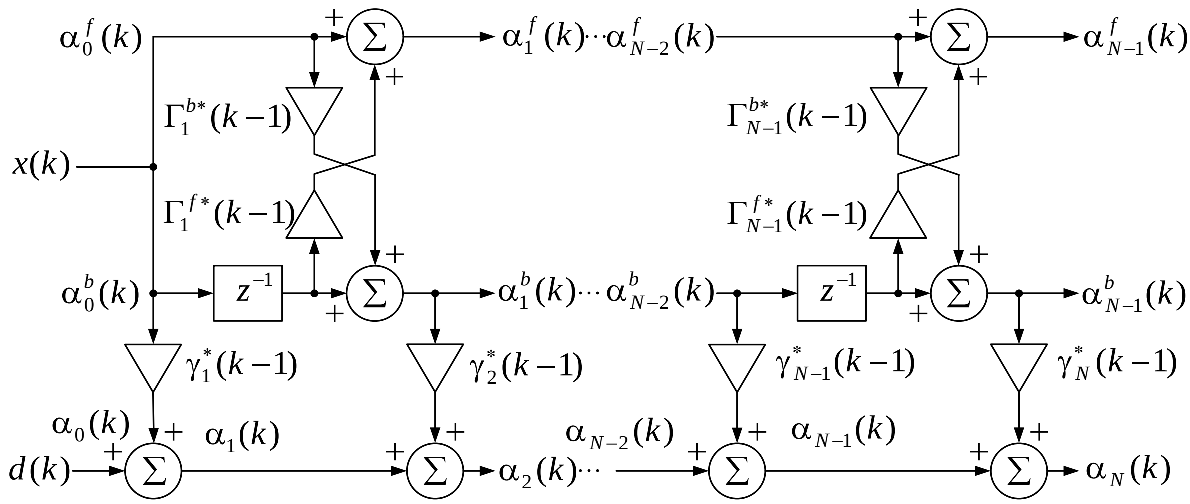


Рис. 21. Адаптивный фильтра на базе лестничного RLS-алгоритма, использующего априорные ошибки

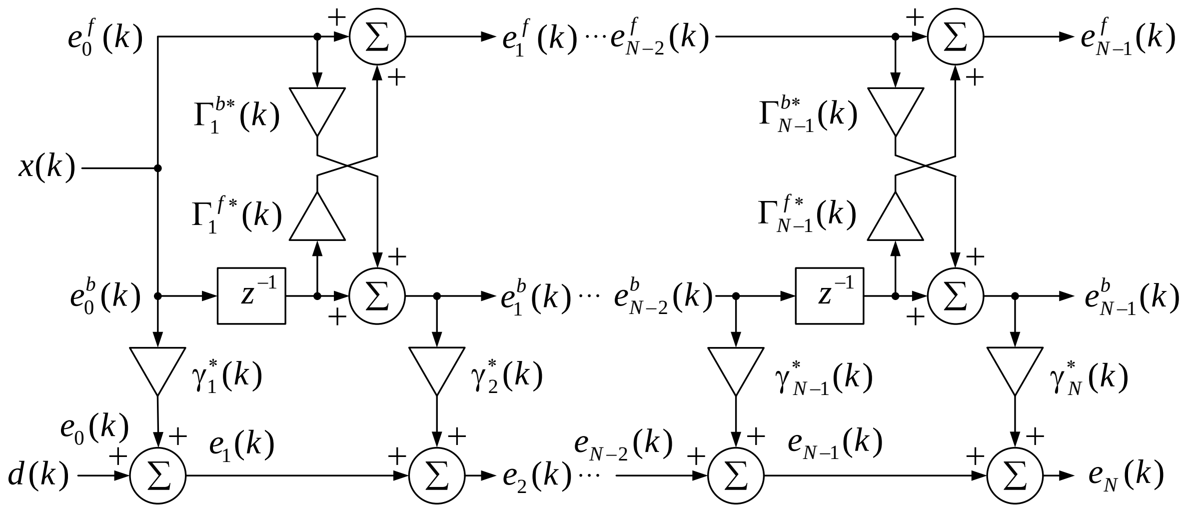


Рис. 22. Адаптивный фильтра на базе лестничного RLS-алгоритма, использующего априорные ошибки

Обработка нестационарных сигналов

Если обрабатываются нестационарные сигналы, то корреляционная матрица в RLS-алгоритмах должна оцениваться на скользящем окне выборок, число которых зависит от длительности интервала стационарности сигнала. Это приводит к примерно двукратному увеличению вычислительной сложности RLS-алгоритмов со скользящим окном по сравнению с алгоритмами с возрастающим (бесконечным) окном, которое используется при обработке стационарных сигналов [8]. Сложность также удваивается, если корреляционная матрица динамически регуляризируется. Регуляризация часто требуется для обеспечения устойчивости обращения корреляционной матрицы, потому что матрица, полученная на ограниченном числе выборок скользящего окна, может оказаться плохо обусловленной. Влияние скользящего окна и регуляризации на эффективность адаптивного фильтра RLS показано на рис. 23 и рис. 24.

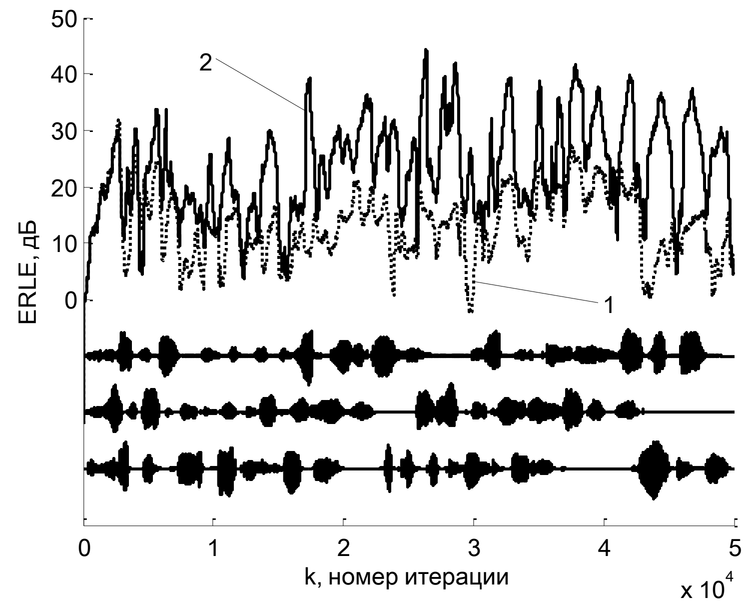


Рис. 23. Влияние скользящего окна

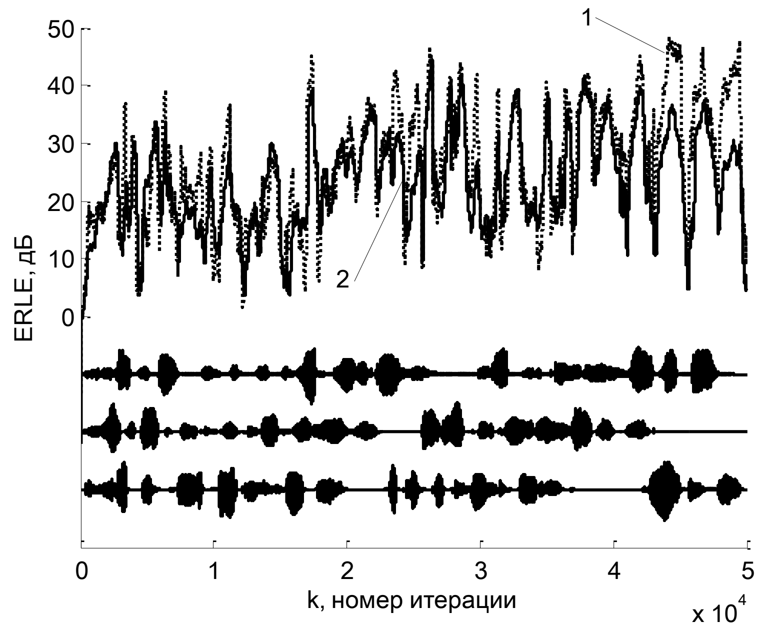


Рис. 24. Влияние регуляризации

На рис. 23 и рис. 24 показаны примеры поведения многоканального эхокомпенсатора с помощью адаптивного фильтра, который обрабатывает нестационарные сигналы (сигналы речи, условно изображенная в нижней части рисунков). На рисунках показан процесс адаптации в терминах параметра, называемого ослабления эхо-сигнала (Echo Return Loss Enhancement, ERLE), который представляет собой в логарифмическом масштабе функцию соотношения энергий неподавленного и подавленного эхо-сигналов.

На рис. 23 кривая 1 обозначает процесс адаптации адаптивного фильтра, который использует RLS-алгоритм с возрастающим окном, а кривая 2 – процесс адаптации адаптивного фильтра, который использует RLS-алгоритм со скользящим окном. Длительность скользящего окна в данных примерах составляет около 30 мс, что является приблизительным интервалом, на котором сигнал речи принято считать стационарным сигналом. На рисунке показано, что по сравнению с возрастающим окном, скользящее окно обеспечивает примерно на 20 дБ большее значение ERLE в установившемся состоянии. Эксперимент со скользящим окном также обозначен кривой 2 на рис. 24, а эксперимент со скользящим окном и регуляризацией – кривой 1. На рисунке показано, что динамическая регуляризация не ухудшает адаптацию, а в некоторых случаях (когда корреляционная матрица, оцененная по конечному числу выборок, становится плохо обусловленной) даже улучшает качество адаптации. Цена улучшения – это примерно двукратное (если используется только скользящее окно) или четырехкратное (если используется скользящее окно и регуляризация) увеличение вычислительной сложности таких RLS-алгоритмов по сравнению с алгоритмами со возрастающим окном.

Повышение вычислительной сложности вызвано последовательным выполнением двух или четырех групп однотипных арифметических операций с потоками данных, которые используются для вычисления корреляционной матрицы (рис. 25а). Ели для реализации адаптивного фильтра доступны два или четыре процессора, то RLS-алгоритмы для нестационарной обработки сигналов могут быть получены в математически эквивалентной параллельной форме (рис. 25б) [11]. Такие алгоритмы ориентированы на реализацию в многоядерных процессорах цифровых сигналов [12] и их реализация не зависят от архитектуры адаптивного фильтра (одно- или многоканальный) и числа его весовых коэффициентов в каналах.

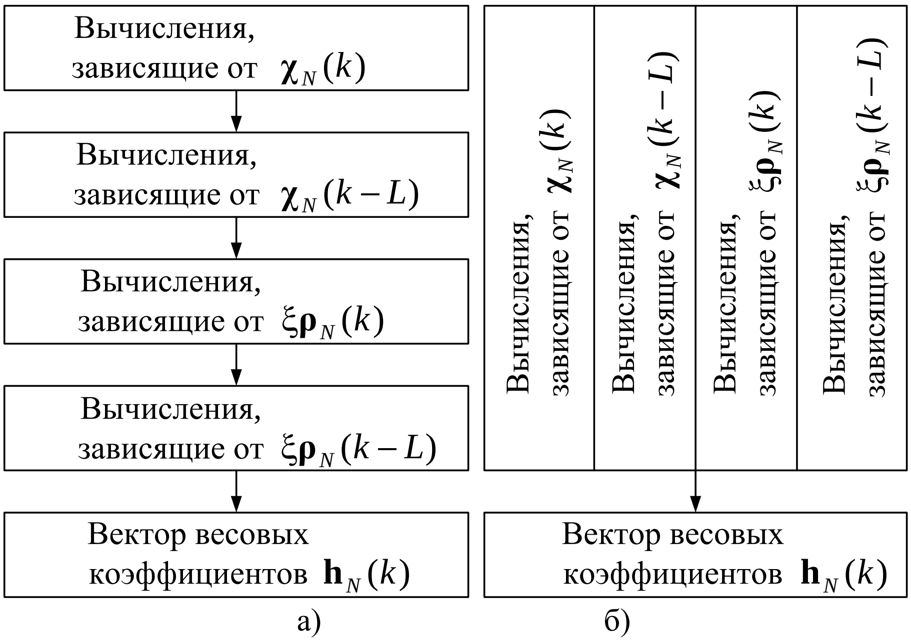


Рис. 25. Последовательные и параллельные RLS-алгоритмы

Другие алгоритмы адаптивной фильтрации

Промежуточным классом между градиентными LMS-, NLMS- а также RLS-алгоритмами адаптивной фильтрации является алгоритм аффинной проекции (Affine Projection, AP). Быстрая версия алгоритма [13] широко сегодня используется в задачах акустического эхоподавления.

Все алгоритмы адаптивной фильтрации могут иметь версии с линейными ограничениями (Linearly Constrained, LC) [8]. В LC-алгоритмах поиск весовых коэффициентов адаптивного фильтра производится не на всей области определения этих коэффициентов, а вдоль кривой пересечения координатной плоскости весовых коэффициентов с плоскостью линейных ограничений (рис. 26).

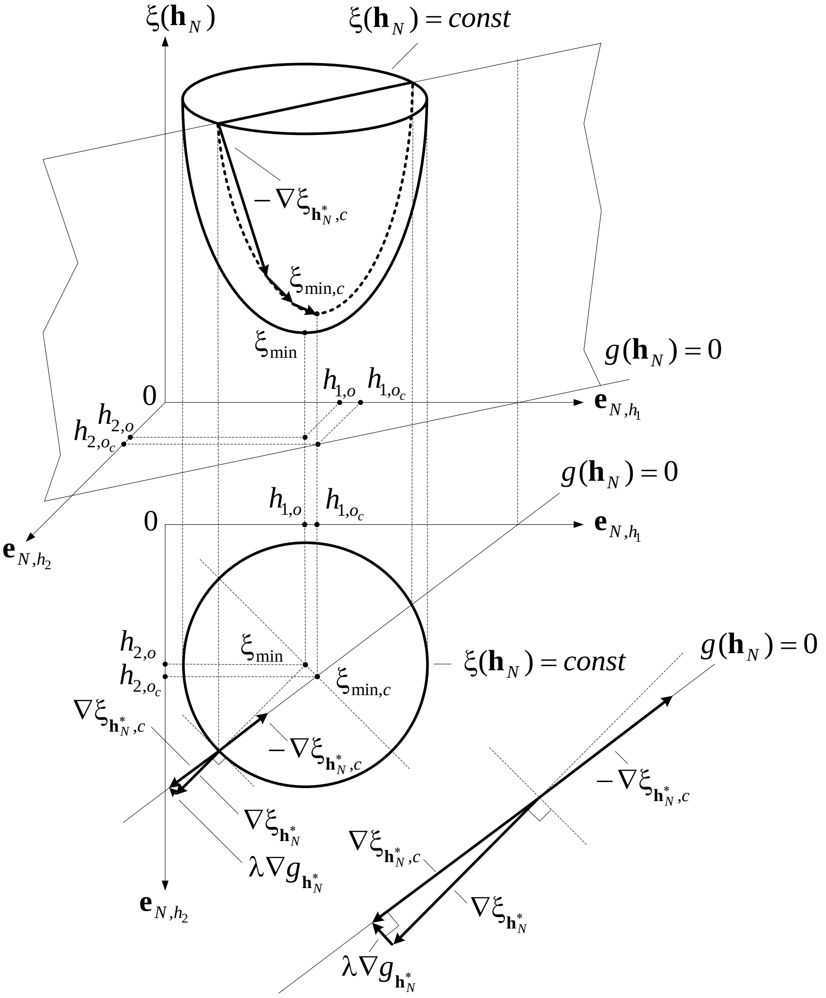


Рис. 26. Линейно-ограниченная адаптивная фильтрация сигналов

Адаптивные фильтры, основанные на LC-алгоритмах, широко используются в адаптивных антенных решетках [14, 15]. В таких решетках требуемый сигнал может отсутствовать. В этом случае формирования основного луча диаграммы направленности решетки и его защита от разрушения обеспечиваются линейным ограничением, которое поддерживает заранее определенный уровень диаграммы направленности в известном направлении на источник информационного сигнала.

Другой вид адаптивного фильтров основан на слепой обработке сигнала [16]. Такая обработка также не требует наличия физического требуемого сигнала. Это полезное свойство в случаях, когда адаптивный фильтр является составной частью эквалайзера канала связи или антенной решетки. Вместо физического требуемого сигнала при слепой обработке можно использовать некоторое заранее известное свойство принятого сигнала, например, значение модуля его комплексной огибающей.

Одновременное использование слепой обработки сигналов и линейных ограничений нашло широкое применение в приемных антенных решетках [17 – 19].

Антенные решетки могут быть одно- или многолучевыми. В случае симметричной апертуры решетки большая часть вычислений адаптивных алгоритмов может выполняться в арифметике действительных чисел. Это позволяет примерно вдвое снизить арифметическую сложность алгоритмов по сравнению с аналогичными алгоритмами в арифметике комплексных чисел, а также обеспечивает примерно в два раза более короткий переходный процесс и примерно на 3 дБ большую глубину провалов в диаграмме направленности в направлении источников помех. Алгоритмы в арифметике комплексных чисел могут применяться в антенных решетках произвольной конфигурации, в том числе двумерных [20], только лишь с единственным с ограничением: решетка должна быть нечетно-симметричной [21 – 24].

Дополнительная информация об адаптивных фильтрах и их приложениях доступна в классических книгах по адаптивной обработке сигналов [1, 6, 7, 14, 25 – 28], учебных пособиях автора [29, 30], а также в соответствующих российских и международных технических журналах, и трудах российских и международных научно-технических конференций.

Выводы

Таким образом, адаптивная обработка сигналов – это сложившаяся область современной ЦОС. Однако, несмотря на большие её теоретические и практические достижения, все еще существует много направлений для исследований, среди которых адаптивные фильтры с бесконечными импульсными характеристиками, многоскоростные адаптивные фильтры, нелинейные адаптивные фильтры и ряд других. Решение научных задач, которые возникают в этих исследованиях, придаст новое качество адаптивным устройствам и системам на их основе, а технологические достижения современной микроэлектронной промышленности позволят создавать адаптивные фильтры в небольших по размеру корпусах, легких по весу и с низким энергопотреблением [31 – 34]. Это, несомненно, будет способствовать широкому использованию адаптивных фильтров на практике [35].

Литература

1. Sayed A. H. Fundamentals of adaptive filtering. – John Wiley and Sons, Inc., 2003. 1125 p.
2. Clarkson P. M. Optimum and adaptive signal processing. – CRC Press, 1993. 529.
3. Widrow B., Hoff M. E. Adaptive switching circuits // IRE WESCON Convention Record. Part 4. 1960. С. 96-104.
4. Widrow B. Thinking about thinking: the discovery of the LMS algorithm – DSP history // IEEE Signal Processing Magazine. 2005. Vol. 22. № 1. С. 100-106.
5. Джиган В. И. Адаптивные фильтры и их приложения в радиотехнике и связи // Современная элеткроника. Часть 1. 2009. № 9. С. 56-63; Часть 2. 2010. – № 1. С. 72-77; Часть 3. 2010. № 2. С. 70-74.
6. Giordano A. A. Hsu F. M. Least square estimation with application to digital signal processing. – John Wiley and Sons, Inc., 1985. 412 p.
7. Apolinario J. A., Ed. QRD-RLS adaptive filtering. – Springer, 2009. 356 p.
8. Джиган В. И. Многоканальные RLS- и быстрые RLS-алгоритмы адаптивной фильтрации // Успехи современной радиоэлектроники. 2004. № 11. С. 48-77.
9. Джиган В. И. Многообразие лестничных RLS-алгоритмов адаптивной фильтрации // Цифровая обработка сигналов. 2005. № 3. С. 2-12.
10. Джиган В. И. Условия эквивалентности рекурсивных алгоритмов адаптивной фильтрации по критерию наименьших квадратов // Телекоммуникации. 2006. № 6. С. 6-11.
11. Djigan V. I. RLS adaptive filtering algorithms based on parallel computations // Radioengineering: Proceedings of Czech and Slovak Technical Universities and URSI Committers. 2005. Vol. 14. № 3. С. 28-36.

12. Welch T. B., Wright H. G., Morrow M. G. Real-time digital signal processing from MATLAB to C with the TMS320C6x DSPs, 3-rd edition. – CRC Press, 2017. 480 p.
13. Gay S. L. A fast converging, low complexity adaptive filtering algorithm // Proc. of the 3-rd International Workshop on Acoustic Echo Control. Plestin les Greves, France. 1993. P. 223-226.
14. Compton R. T. Adaptive antennas. Concepts and performance. – Prentice Hall, 1988. 448 p.
15. Frost O. L. An algorithm for linearly constrained adaptive array processing // Proceedings of the IEEE. 1972. Vol. 60. № 8. P. 926-935.
16. Treichler J., Larimore M. New processing techniques based on the constant modulus adaptive algorithm // IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing. 1985. Vol. 33. № 2. P. 420-431.
17. Rude M. J. Griffiths L. J. Incorporation of linear constraints into the constant modulus algorithm // International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. 1989. Vol. 2. P. 968-971.
18. Djigan V. I. Joint use of constant modulus and least squares criteria in linearly-constrained communication arrays // Radioengineering: Proceedings of Czech and Slovak Technical Universities and URSI Committers. 2007. Vol. 16. № 4. P. 88-95.
19. Джиган В. И. Многолучевая адаптивная антенная решетка // Известия ЮФУ. Технические науки. 2012. № 2. С. 23-29.
20. Джиган В. И. Особенности линейно-ограниченной адаптивной фильтрации сигналов в двумерных антенных решетках // Доклады 20-й Международной конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применения (DSPA-2018)» (Российская академия наук: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова, 28 – 30марта 2018 г.). Москва, 2018. Т. 1. С. 260-264.
21. Nitzberg R. Application of maximum likelihood estimation of persymmetric covariance matrices to adaptive processing // IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems. 1980. Vol. 16. № 1. P. 124-127.
22. Huarng K.-C., Yeh C.-C. Adaptive beamforming with conjugate symmetric weights // IEEE Trans. Antennas and Propagation. 1991. Vol. 39. № 7. P. 926-932.
23. Джиган В. И. Алгоритмы адаптивной линейно-ограниченной слепой обработки сигналов в цифровых антенных решетках с нечетной симметрией // Цифровая обработка сигналов. 2015 № 2. С. 3-13.
24. Джиган В. И. Нечетная симметрия вектора весовых коэффициентов симметричных антенных решеток с линейными ограничениями // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. 2018. № 6. С. 323-335.
25. Джиган В. И. Адаптивная фильтрация сигналов: теория и алгоритмы. – М.: Техносфера, 2013. 528 с.
26. Diniz P. S. R. Adaptive filtering. Algorithms and practical implementation, 5-th edition. – Springer, 2020. 495 p.
27. Farhang-Boroujeny B. Adaptive filters. Theory and applications, 2-nd edition. – John Willey and Sons, 2013. 778 p.
28. Haykin S. Adaptive filter theory, 5-th edition. – Pearson Education, 2014. 889 p.
29. Джиган В. И. Адаптивная обработка сигналов в радиотехнических системах: учебн. пособие. – М.: МИЭТ, 2012. 148 с.
30. Джиган В. И. Адаптивные алгоритмы и устройства радиотехнических систем: учебн. пособие. – М.: МИЭТ, 2016. 104 с.
31. Bayoumi M. A. VLSI design methodologies for digital signal processing architectures. – Springer, 1994. 399 p.
32. Woods R., McAllister J., Lightbody G., Yin Yi. FPGA-based implementation of signal processing systems, 2nd ed. – Willey, 2017. 360 p.

33. Kuo S. M., Gan W.-S., Digital signal processors: architectures, implementations and applications. – Prentice Hal, 2004. 624 p.
34. Welch T. B., Wright H. G., Morrow M.G.. Real-time digital signal processing from MATLAB to C with the TMS320C6x DSPs, 3rd ed. – CRC Press, 2017. 480 p.
35. Benesty J., Huang Y., Eds. Adaptive signal processing: applications to real-workd problems. – Sprringer-Verlag, 2003. 356 p.