

Численное тестирование дисперсионных уравнений гиротропных эллиптических волноводов при продольном намагничивании

Г.Б. Итигилов, Д.Ш. Ширапов

*Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления
670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В
E-mail: shir48@mail.ru*

В результате решения задачи Дирихле для уравнений Гельмгольца эллиптического гиротропного волновода при продольном намагничивании были получены дисперсионные уравнения для четных и нечетных волн. В работе проведено численное тестирование этих дисперсионных уравнений следующим образом:

- 1) Рассчитаны зависимости постоянной распространения электромагнитной волны от напряженности намагничивающего продольного магнитного поля для эллипса с эксцентриситетом равным 0,02 (почти круг);*
- 2) Проведено сравнение, рассчитанных зависимостей постоянной распространения электромагнитной волны с известными аналогичными результатами для цилиндрического гиротропного волновода.*

Результаты сравнения показали корректность полученных дисперсионных уравнений эллиптического гиротропного волновода при продольном намагничивании для четных и нечетных волн.

Ключевые слова: задача Дирихле, уравнение Гельмгольца, тестирование, волновод

Numerical testing of dispersion equations of gyrotropic elliptical waveguides under longitudinal magnetization

G.B. Itigilov, D.Sh. Shirapov

East Siberian State University of Technology and Management

As a result of solving the Dirichlet problem for the Helmholtz equations of an elliptic isotropic waveguide with longitudinal magnetization, dispersion equations for even and odd waves were obtained. Numerical testing of these dispersion equations is carried out in the paper as follows:

- 1) The dependences of the electromagnetic wave propagation constant on the strength of the magnetizing longitudinal magnetic field for an ellipse with an eccentricity equal to 0.02 (almost a circle) are calculated;*
- 2) The calculated dependences of the electromagnetic wave propagation constant are compared with the known similar results for a cylindrical gyrotropic waveguide.*

The results of the comparison showed the correctness of the obtained dispersion equations of an elliptical isotropic waveguide with longitudinal magnetization for even and odd waves.

Keywords: Dirichlet problem, Helmholtz equation, testing, waveguide

Введение

Для установившегося во времени процесса без наведенных токов и зарядов, соответствующая система дифференциальных уравнений Максвелл для гиротропных волноводов определена в [1]. В работе [2] решением этой системы дифференциальных уравнений Максвелла получены обобщенные уравнения Гельмгольца для гиротропных волноводов с произвольными ортогональными формами поперечного сечения при произвольном намагничивании, из которых были выведены общие уравнения Гельмгольца для гиротропных волноводов с произвольными ортогональными формами

поперечного сечения при продольном намагничивании. Затем из общих уравнений Гельмгольца были получены уравнения Гельмгольца для гиротропных эллиптических волноводов при продольном намагничивании [2]. Последующее решение задачи Дирихле для уравнений Гельмгольца гиротропных эллиптических волноводов при продольном намагничивании позволило найти соответствующие дисперсионные уравнения [3].

В настоящее время в научной литературе нет экспериментальных данных и теоретических работ, связанных с исследованиями различных параметров и характеристик распространения электромагнитных волн в гиротропных эллиптических волноводах при продольном намагничивании, наличие которых позволило бы провести необходимую проверку полученных дисперсионных уравнений.

Целью данной работы является численное тестирование дисперсионных уравнений гиротропных эллиптических волноводов при продольном намагничивании.

Данные и обсуждение

Задача Дирихле для уравнений Гельмгольца для EH обыкновенной и HE необыкновенной волн гиротропного эллиптического волновода при продольном намагничивании записывается в виде [3]

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + e^2 d^2 (\omega^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2) E_z - j e^2 d^2 \gamma \omega \mu_{\parallel} \frac{k}{\mu} H_z = 0, \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + e^2 d^2 \left(\omega^2 \varepsilon \mu_{\parallel} - \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \gamma^2 \right) H_z + j e^2 d^2 \gamma \omega \varepsilon \frac{k}{\mu} E_z = 0, \end{cases} \quad (1)$$

условие Дирихле для электрического поля на границе бесконечно проводящей поверхности эллиптического волновода

$$E_z |_{\xi=\xi_0} = E_{\varphi} |_{\xi=\xi_0} = 0. \quad (2)$$

Здесь

(ξ, φ, z) – координаты эллиптической системы;

ξ_0 – граничный эллипс;

E_z, H_z – продольные компоненты электрического и магнитного полей;

e – фокусное расстояние эллипса;

$$d^2 = ch^2 \xi - \cos^2 \varphi;$$

ω – циклическая частота;

ε – диэлектрическая проницаемость феррита;

$$\mu_{\parallel} \approx \mu_0, \mu_{\perp} = \frac{\mu^2 - k^2}{\mu}, \mu = \mu_0 - \mu_0 \frac{\omega_0 \omega_m}{\omega^2 - \omega_0^2}, k = \mu_0 \frac{\omega \omega_m}{\omega^2 - \omega_0^2} - \text{компоненты тензора}$$

магнитной проницаемости феррита;

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_H}{M} - \text{магнитная постоянная};$$

$$\omega_0 = \mu_0 \Upsilon H_0 - \text{частота ферромагнитного резонанса};$$

$$\Upsilon = 1,76 \cdot 10^{11} \frac{K_l}{\text{кГ}} - \text{гирромагнитное отношение};$$

H_0 – напряженность намагничивающего постоянного магнитного поля;

$$\omega_m = \mu_0 \Upsilon M_0;$$

M_0 – намагниченность насыщения феррита;

γ – постоянная распространения;

j – мнимое число.

Решениями задачи Дирихле (1) и (2) являются дисперсионные уравнения для четных и нечетных волн [3]. Дисперсионное уравнение для четных волн имеет вид

$$\begin{aligned} & \left[-\left(k_{\perp}^2 - \gamma^2 - \frac{4q_1}{e^2}\right) \frac{4q_2}{e^2} \frac{Ce'_m(\xi_0, q_1)}{Ce_m(\xi_0, q_1)} + \left(k_{\perp}^2 - \gamma^2 - \frac{4q_2}{e^2}\right) \frac{4q_1}{e^2} \frac{Ce'_m(\xi_0, q_2)}{Ce_m(\xi_0, q_2)} \right] + \\ & + j \left[\frac{a^2}{\omega^2 \varepsilon k} \left(k_{\perp}^2 - \gamma^2 - \frac{4q_1}{e^2}\right) \left(k_{\perp}^2 - \gamma^2 - \frac{4q_2}{e^2}\right) \left\{ \frac{ce'_m(\varphi, q_2)}{ce_m(\varphi, q_2)} - \frac{ce'_m(\varphi, q_1)}{ce_m(\varphi, q_1)} \right\} + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma^2}{\mu} \left\{ \frac{ce'_m(\varphi, q_1)}{ce_m(\varphi, q_1)} \left(k_{\perp}^2 - \gamma^2 - \frac{4q_1}{e^2}\right) - \frac{ce'_m(\varphi, q_2)}{ce_m(\varphi, q_2)} \left(k_{\perp}^2 - \gamma^2 - \frac{4q_2}{e^2}\right) \right\} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

где $k_{\perp}^2 = \omega^2 \varepsilon \mu_{\perp}$, $Ce_m(\xi, q_{1,2})$ – четные модифицированные функции Матье 1-го рода (с целым индексом) и их производные $Ce'_m(\xi, q_{1,2})$, $ce_m(\varphi, q_{1,2})$ – четные обыкновенные функции Матье 1-го рода целого порядка m и их производные $ce'_m(\varphi, q_{1,2})$, a – большая

полуось эллипса, параметры функций Матье [3] $q_{1,2} = \frac{e^2 \left(k_{\perp}^2 - \gamma^2 - \Lambda_{1,2} \gamma \omega \varepsilon \frac{k}{\mu} \right)}{4}$.

После проведения нижеследующей замены в (3)

$$\begin{cases} Ce(\xi_0, q_{1,2}) \rightarrow Se(\xi_0, q_{1,2}), Ce'(\xi_0, q_{1,2}) \rightarrow Se'(\xi_0, q_{1,2}), \\ ce(\varphi, q_{1,2}) \rightarrow se(\varphi, q_{1,2}), ce'(\varphi, q_{1,2}) \rightarrow se'(\varphi, q_{1,2}), \end{cases}$$

получим дисперсионное уравнение для нечетных волн

$$\begin{aligned} & \left[-\left(k_{\perp}^2 - \gamma^2 - \frac{4q_1}{e^2}\right) \frac{4q_2}{e^2} \frac{Se'_m(\xi_0, q_1)}{Se_m(\xi_0, q_1)} + \left(k_{\perp}^2 - \gamma^2 - \frac{4q_2}{e^2}\right) \frac{4q_1}{e^2} \frac{Se'_m(\xi_0, q_2)}{Se_m(\xi_0, q_2)} \right] + \\ & + j \left[\frac{a^2}{\omega^2 \varepsilon k} \left(k_{\perp}^2 - \gamma^2 - \frac{4q_1}{e^2}\right) \left(k_{\perp}^2 - \gamma^2 - \frac{4q_2}{e^2}\right) \left\{ \frac{se'_m(\varphi, q_2)}{se_m(\varphi, q_2)} - \frac{se'_m(\varphi, q_1)}{se_m(\varphi, q_1)} \right\} + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma^2}{\mu} \left\{ \frac{se'_m(\varphi, q_1)}{se_m(\varphi, q_1)} \left(k_{\perp}^2 - \gamma^2 - \frac{4q_1}{e^2}\right) - \frac{se'_m(\varphi, q_2)}{se_m(\varphi, q_2)} \left(k_{\perp}^2 - \gamma^2 - \frac{4q_2}{e^2}\right) \right\} \right] = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $Se(\xi_0, q_{1,2})$ и $Se'(\xi_0, q_{1,2})$ – нечетные присоединенные (модифицированные) функции Матье 1-го рода (с целым индексом) и их производные, $se(\varphi, q_{1,2})$ и $se'(\varphi, q_{1,2})$ – нечетные обыкновенные функции Матье 1-го рода целого порядка m и их производные.

На рисунке 1 приведены данные, полученные решением дисперсионных уравнений (3) и (4) при эксцентриситете $E=0,02$ (почти окружности) и $\varphi=45^0$, т.е. показаны графики зависимостей постоянной распространения от напряженности намагничивающего продольного магнитного поля для круглого гиротропного волновода. При определении постоянной распространения γ_z корни функций Матье и ее производных вычислялись численно.

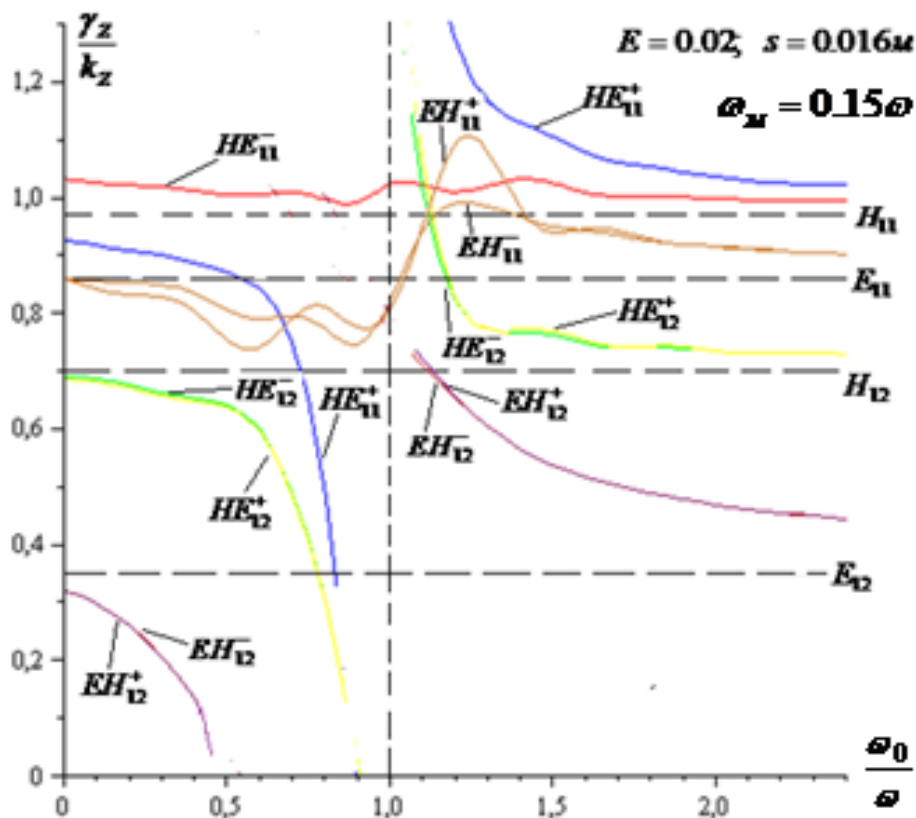


Рис. 1. Зависимость постоянной распространения от напряженности намагничивающего поля, E – эксцентриситет, s – большая полуось эллипса. Горизонтальными пунктирными линиями показаны моды при отсутствии магнитного поля: $H_{11}, E_{11}, H_{12}, E_{12}$. Вертикальная пунктирная линия соответствует ферромагнитному резонансу

Для сравнения на рисунке 2 показаны графики зависимостей постоянной распространения от напряженности намагничивающего продольного магнитного поля для гиротропного цилиндрического волновода, полученные в [1] с такими же исходными данными, как и для случая на рисунке 1.

На рисунках 1 и 2 по осям X отложены намагниченность внешнего постоянного магнитного поля $\frac{\omega_0}{\omega}$, по осям Y – нормированная постоянная распространения $\frac{\gamma_z}{k_z}$,

k_z – волновое число в безграничной немагниченной ферритовой среде. Отметим, что при вычислении постоянной распространения γ_z в обоих случаях использовались $\omega = 6.28 \cdot 10^{10}$ Гц – круговая частота, $\omega_0 = \mu_0 \Upsilon H_0$ – частота ферромагнитного резонанса,

$$\Upsilon = 1,76 \cdot 10^{11} \frac{Kl}{кг} \text{ – гиромангнитное отношение, } \mu_0 = 12.56 \cdot 10^{-7} \frac{Гн}{м} \text{ – магнитная}$$

постоянная, H_0 – напряженность внешнего постоянного продольно направленного намагничивающего магнитного поля, $\omega_M = \mu_0 \Upsilon M_0$ – частота, связанная с намагниченностью феррита M_0 .

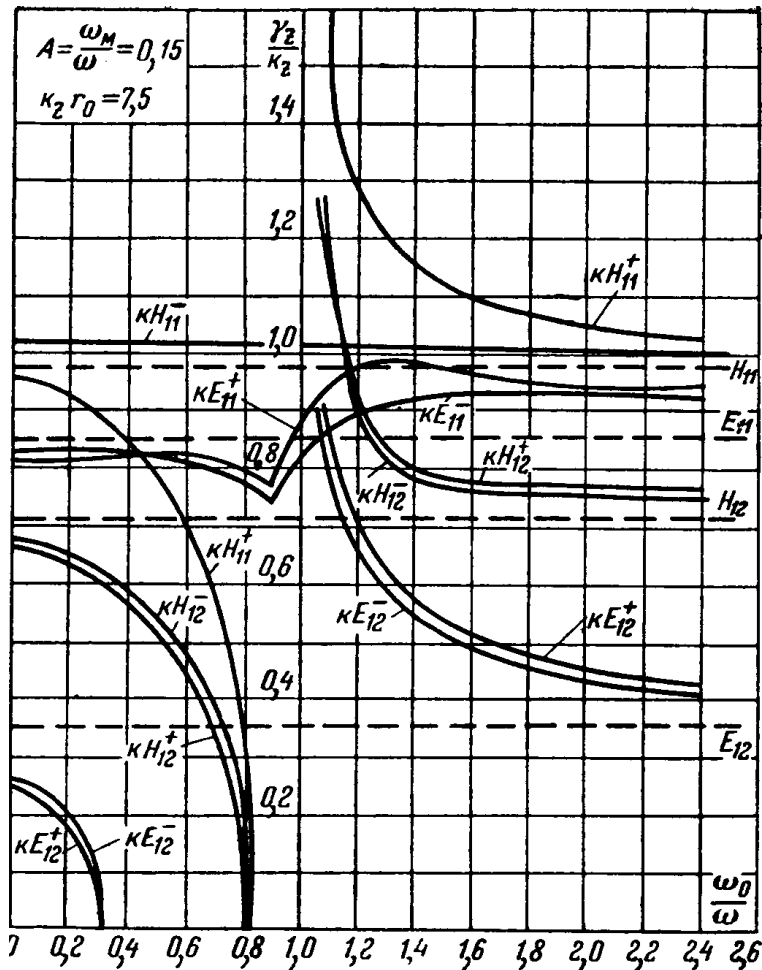


Рис. 2. Зависимость постоянной распространения от напряженности намагничивающего поля для гиротропного цилиндрического волновода [1]

Из данных на рисунках 1 и 2 следует, что электромагнитная волна, распространяющаяся в ограниченной гиротропной области вдоль постоянного магнитного поля распадается на две независимые друг от друга волны, имеющие разные постоянные распространения, например, волна HE_{11} распадается на волны HE_{11}^+ и HE_{11}^- . Индексом «+» обозначается волна правого вращения, а индексом «-» — волна левого вращения.

Сравнение графиков на рисунке 1 для волн $HE_{11}^+, HE_{11}^-, HE_{12}^+, HE_{12}^-, EH_{11}^+, EH_{11}^-, EH_{12}^+, EH_{12}^-$ с графиками на рисунке 2 [1] для этих же волн показывает хорошее совпадение. Имеющиеся небольшие погрешности обусловлены эксцентриситетом $E=0,02$ (а не $E=0$), а также погрешностями численного вычисления корней функции Матье.

Выводы

Проведенное численное тестирование дисперсионных уравнений (3) и (4) для гиротропного эллиптического волновода при продольном намагничивании подтверждает корректность этих уравнений.

Литература

1. Микаэлян А.Л. Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах // Л.: Госэнергоиздат, 1963. 664 с.

2. Ширапов Д.Ш., Итигилов Г.Б. Обобщенные уравнения Гельмгольца гиротропных волноводов произвольной формы поперечного сечения // Материалы II Всероссийской научной конференции «Современные проблемы дистанционного зондирования, радиолокации, распространения и дифракции волн», г. Муром. 26-28 июня 2018 г. С. 209-219.
3. Ширапов Д.Ш., Итигилов Г.Б., Юмов И.Б., Анахин В.Д., Дамбаев Ж.Г. Задача Дирихле для уравнений Гельмгольца в гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании // Вестник БГУ. Математика, информатика. 2019. №3. С. 17-31. DOI: 10.18101/2304-5728-2019-3-17-31