Калачева А.М.
Научный руководитель: к.с.н. Смолина Н.В.
Муромский институт (филиал) федерального государственного образовательного учреждения высшего образования «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
602264, г. Муром, Владимирская обл., ул. Орловская, 23
e-mail: alinna.kalacheva@gmail.com

Производная в решении экономических задач

Производная функции характеризует скорость изменения функции в данной точке. Определяется как предел отношения приращения функции к приращению её аргумента, $y'=\Delta y/\Delta x$ при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует.

Производная широко применяется в экономическом анализе и экономической теории. Знание производной позволяет решать разнообразные задачи по экономической теории. В экономике очень часто требуется найти значение таких показателей, как предельная производительность труда, максимальная прибыль, максимальный выпуск, минимальные издержки и так далее. Дифференциальное исчисление получило широкое применение как математический аппарат для экономического анализа и его развития в экономике. Базовой задачей экономического анализа является изучение связей экономических величин, записанных в виде функций.

Рассмотрим пример задачи, которая решается с помощью производной.

Условие: Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$. За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей. Григорий готов выделять 5 000 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение: вводим новые переменные. Поскольку на первом и на втором заводе время разное, мы заменили t на a на первом заводе, на втором — t на b. Пусть на первом заводе расходуется a^2 времени и производится $3a$ единиц продукции. На втором — b^2 времени и $4b$продукции. Суммарный расход времени составляет a^2+b^2, а суммарный расход продукции – $(3a+4b)$.

Составим и решим уравнение:

$500(a^2+b^2) = 5000000$,

$500a^2 + 500b^2 = 5000000$.

Выразим из данного уравнения переменную b:

$b = \sqrt{10000 - a^2}$,

берем положительное значение, так как речь идет о времени, а оно не может быть отрицательным

Суммарный выпуск продукции (S) равен:

$S=3a+4b\to\max$

Имея ограничение на a и b, нам нужно добиться того, чтобы S принимала свое максимальное значение. Подставим вместо b выражение $\sqrt{10000 - a^2}$, получаем

$S=3a+4\sqrt{10000-a^2}$

Найдём максимальное значение функции на всей области определения [0; 100].

$10000-a^2\geq 0$,

$a^2\leq 10000$,

$|a|\leq 100$.

$a \in [0;100]$

Найдём производную функции $S=3a+4\sqrt{10000-a^2}$:

$S'=3+4(-2a)/2\sqrt{10000-a^2} = 3-4a/\sqrt{10000-a^2}$,

Решим уравнение: $3-4a/\sqrt{10000-a^2} = 0$.

$9(10000-a^2)=16a^2$,

$90000-9a^2=16a^2$,

$25a^2=90000$,

$a^2 = 3600$,

$a = 60$.

Теперь, зная, чему равно a, легко найти b:

$b=\sqrt{10000-3600} = \sqrt{6400} = 80$.

Найдём экстремумы функции.

Производная в точке a = 60 меняет знак с «+» на «-». Отсюда следует, что a=60является точкой максимума, т.е. именно той, которую мы и хотели найти. Именно в ней наша исходная функция принимает наибольшее значение. Осталось подставить в S полученное значение a и b:

$S = 3 * 60 + 4 * 80=180 + 320 = 500$.

Ответ: 500 единиц товара.

В заключение можно сказать, что производная часто используется в экономических задачах и теориях. Благодаря использованию производной или дифференциального исчисления решаются многие экономические задачи, такие как, например, задачи об эластичности спроса, или как представлено выше: задачи о нахождении производительности труда.

Литература

1. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономистов. – СПб., 2005. – 464с.: ил. – (Серия «Учебное пособие»)

2. Кремер, Н. Ш. К79 Высшая математика для экономического бакалавриата : учебник и практикум / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Три-шин, М. Н. Фридман ; под ред. Н. Ш. Кремера. — 4 е изд., пе-рераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт ; ИД Юрайт, 2012. — 909 с. — Серия : Бакалавр.