Жиганов С.Н., Михеев К.В., Ракитин А.В.
*Муромский институт (филиал) федерального государственного образовательного учреждения высшего образования «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»*
*602264, г. Муром, Владимирская обл., ул. Орловская, 23*
*E-mail: s_zh_72@mail.ru*

**Применение многочленов Гегенбауэра при аппроксимации функциональных зависимостей**

Одной из основных задач, решаемых в системах обработки информации и реализации полученных алгоритмов на различных вычислительных устройствах является замена одной функции f(x) другой максимально близко похожей на нее, которую проще использовать в расчетах, либо реализовать в вычислителях, т.е. необходимо сделать замену вида

$$f(x) \approx \varphi(x). \qquad (1)$$

При воспроизведении функциональных зависимостей широкое применение нашел полиномиальный метод аппроксимации, который используется во многих научных и прикладных технических задачах: от приближения стандартных математических функций в современных специализированных микропроцессорах до реализации градуировочных характеристик при воспроизведении рабочих эталонов, калибровке датчиков и измерительных систем. Повсеместное распространение полиномиального метода обусловлено его простотой, наглядной геометрической интерпретацией, а главное – низкими вычислительными затратами при расчете значений функции f(x) с помощью полинома

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k. \qquad (2)$$

В работе [1] показано, что для ортогональных многочленов $f_k(x)$ на отрезке [a; b] с весовой функцией ω(x) при m≠n должно выполнятся следующее условие

$$\int_a^b f_m(x)f_n(x)\,\omega(x)dx = 0. \qquad (3)$$

Многочлены Гегенбауэра получаются при весовой функции $\omega(x) = (1 - x^2)^{\lambda-1/2}$. Для этих многочленов при n ≥ 2 справедлива следующая рекуррентная формула

$$C_n^{(\lambda)}(x) = \frac{1}{n}\left[2x(n + \lambda - 1)C_{n-1}^{(\lambda)}(x) - (n - 2\lambda - 2)C_{n-2}^{(\lambda)}(x)\right], \qquad (4)$$

при этом первые две функции равны $C_0^{(\lambda)}(x) = 1, C_1^{(\lambda)}(x) = 2\lambda x$.

Полиномы Гегенбауэра зависят от параметра $\lambda < -1$ и переходят в полиномы Чебышева первого рода, при $\lambda = 1$ – второго рода, а при $\lambda = 1/2$ в полиномы Лежандра.

Аппроксимирующая функции ψ(x) получается из соотношения

$$\psi(x) = c_0 + c_1P_1(x) + c_2P_2(x) + \cdots \qquad (5)$$

коэффициенты которого рассчитываются по формуле

$$c_n = \frac{2^{1-2\lambda}\pi\Gamma(n + 2\lambda)}{n!\,(n + \lambda)[\Gamma(\lambda)]^2}\int_{-1}^{1} f(x)C_n^{(\lambda)}(x)(1 - x^2)^{\lambda-1/2}dx, n = 0,1,2, \ldots \qquad (6)$$

где Γ(λ) – гамма функция. В выражении (1.31) множитель $\frac{2^{1-2\lambda}\pi\Gamma(n+2\lambda)}{n!(n+\lambda)[\Gamma(\lambda)]^2}$ служит для нормировки.

Графики первых десяти многочленов Гегенбауэра при $\lambda = 3$ приведены на рис. 1.

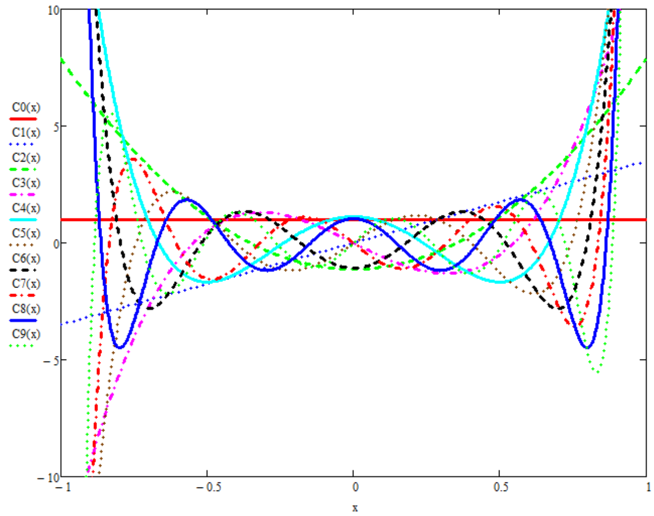


Рис.1. - Полиномы Гегенбауэра при $\lambda = 3$

В работе рассмотрено разложение функции корня $f(x) = \sqrt{x}$ на интервале значений [0, 1] с использованием многочленов Гегенбауэра до 9 порядка. В таблице 1 приведены значения максимальных отклонений от эталонной функции и значения полученной площади ошибки для разных полиномов. На рис.2 приведены графики изменения площади ошибок при использовании полиномов 7 (сплошная кривая) и 9 (штриховая кривая) степени в зависимости от изменения λ для функции корня.

Таблица 1

| Порядок полинома | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\delta_+$ | 0,305 | 0,013 | 0,03 | $2,9\cdot10^{-3}$ | 0,012 | $1,6\cdot10^{-3}$ | $4,3\cdot10^{-3}$ | $1,1\cdot10^{-3}$ | $1,6\cdot10^{-3}$ | $1,7\cdot10^{-4}$ |
| $\delta_-$ | 0,695 | 0,324 | 0,229 | 0,181 | 0,151 | 0,13 | 0,114 | 0,102 | 0,092 | 0,084 |
| $S_{\text{ош}}$ | 0,195 | 0,034 | 0,013 | $6,5\cdot10^{-3}$ | $3,8\cdot10^{-3}$ | $2,4\cdot10^{-3}$ | $1,6\cdot10^{-3}$ | $9,3\cdot10^{-8}$ | $7,3\cdot10^{-4}$ | $5,3\cdot10^{-4}$ |

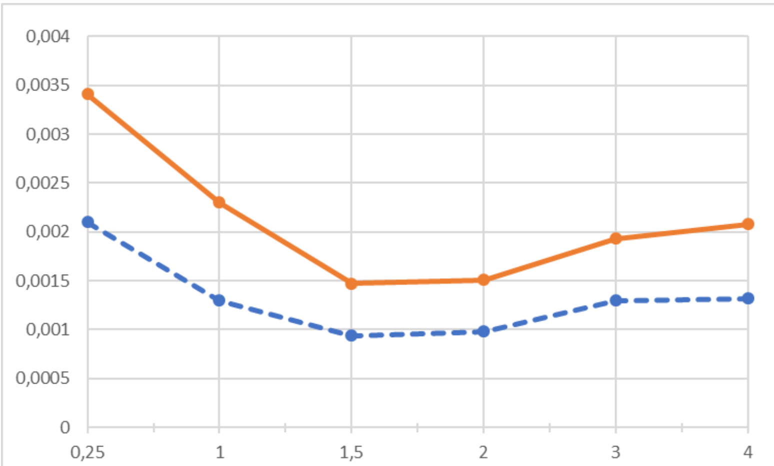


Рис.2. - Графики изменения $S_{\text{ош}}$ от λ для функции корня при использовании полиномов 7-й (сплошная кривая) и 9-й (штриховая кривая) степени

Из рис. 1.18 видно, что оптимальное значение коэффициента λ, обеспечивающее наименьшее значение ошибок аппроксимации находится в диапазоне между 1,5 и 2.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-37-00077 и конкурса инновационных проектов Владимирской области «УМНИК-2018».