Особенности точной и приближенной реконструкции параметров плоскослоистых сред

С.П. Скулкин[1], В.И. Турчин[2]

[1]ОАО «Гипрогазцентр», г. Ниж. Новгород, Алексеевская 26; [2]Институт прикладной физики РАН, г. Ниж. Новгород, Ульянова 46;E-mail: turchin@hydro.appl.sci-nnov.ru

Рассмотрены точные алгоритмы решения прямой и обратной задачи рассеяния и прохождения для одномерно-неоднородного слоя, получена новая модификация уравнения Гельфанда-Левитана. На численных примерах демонстрируются особенности реконструкции профиля параметров среды и возможности использования приближения однократного рассеяния, приведены требования к спектральному составу зондирующего импульса.

Exact algorithms for direct and inverse scattering and transmission problem solution for 1D-inhomogeneouse layer are considered, the new version of Gelfand-Levitan equation is derived. The medium parameter profile reconstruction performance and possibilities of single-scattering approximation are demonstrated using numerical examples; the requirements to the transmitter pulse spectrum are given.

Задача реконструкции пространственного распределения параметров неоднородных сред (скорости распространения, плотности и пр.) по данным их зондирования с помощью широкополосных сигналов имеет многочисленные приложения в сейсморазведке, георадарной технике, диагностике ионосферы, оптике и т.п. Этой проблеме посвящены многочисленные исследования на основе самых различных подходов; их полный анализ затруднителен даже в специальном обзоре. Отметим только, что в общем случае трехмерно-неоднородных сред методы реконструкции являются приближенными, что накладывает довольно существенные ограничения.

В частном, но достаточно важном случае плоскослоистой среды можно, однако, построить точные решения как прямой, так и обратной задачи [1]. Исследования в этом направлении важны по двум причинам. Во-первых, имея точные решения для одномерного случая, можно в известной степени судить о допустимости тех или иных приближений для более высокой размерности. Во-вторых, для природных сред зависимость параметров от координат обычно существенно сильнее выражена именно в одном направлении, поэтому точные решения могут иметь и практический смысл. Известно два подхода к этой задаче [1,2]. Первый основывается на интегральном уравнении Гельфанда-Левитана (см., например, [3]), устанавливающим в квантовой теории рассеяния связь между одномерным потенциалом, отличным от нуля на полупрямой, и функцией рассеяния. Второй использует кусочно-постоянную аппроксимацию параметров среды, матричные методы для нахождения коэффициентов отражения и прохождения (см., например, [4]) и реккурентные процедуры, связывающие импульсную переходную характеристику (ИПХ) неоднородной среды и профиль параметров. В настоящей работе в рамках второго подхода дан вывод процедур решения прямой и обратной задач, несколько отличный от приведенного в [1], с обобщением на случай произвольного угла падения плоской волны, иным представлением модифицированного уравнения Гельфанда-Левитана, и демонстрацией на численных примерах особенностей точной и приближенной реконструкции профиля параметров.

Реконструкция профиля параметров среды по импульсной переходной характеристике

Рассматривается неоднородный слой в интервале $0 \le z \le H$ с параметрами, например, показателем преломления *n*, зависящими от координаты *z*. Слой ограничен справа и слева однородными полупространствами со скоростями распространения c_0 при z<0 и $c_H = c_0 / n_H$ при $z>H$. На неоднородный слой под углом θ к оси *z* падает плоская монохроматическая волна с круговой частотой ω. В однородных полупространствах поле $\varphi(x,z)$ (звуковое или электромагнитное) записывается в виде

$$\varphi = e^{i\kappa x \sin\theta}\left[e^{i\kappa z\cos\theta} + V(\kappa,\theta)e^{-i\kappa z\cos\theta}\right], \quad z<0\,; \varphi = e^{i\kappa x\sin\theta}W(\kappa,\theta)e^{-i\kappa z\sqrt{n_H^2 - \sin^2\theta}}, \quad z>H \quad (1)$$

где V и W – коэффициенты отражения и прохождения соответственно, ось *x* параллельна неоднородному слою, $\kappa = \omega / c_0$. Разобьем неоднородную среду на *M* слоев с постоянными значениями параметров, в частности – показателя преломления n_m. Опуская множитель $\exp(i\kappa x \sin\theta)$, представим поле φ внутри *m*-го слоя в виде

$$\varphi(z) = W_m e^{i\kappa n_m^{(s)} z} + V_m e^{-i\kappa n_m^{(s)} z}, \quad z_{m-1} < z \le z_m \quad (2)$$

где $n_m^{(s)} = \sqrt{n_m^2 - \sin^2\theta}$, z_m - координаты границ между слоями. В дальнейшем полагаем, что всюду $\sin\theta < n_m$: случай полного внутреннего отражения требует специального рассмотрения. Связь между коэффициентами отражения V_{m+1}, V_m и прохождения W_{m+1}, W_m определяется 2?2 матрицей $\mathbf{P}_m$: $\mathbf{u}_{m+1} = \mathbf{P}_m \mathbf{u}_m$, где $\mathbf{u}_m = (V_m, W_m)^T$, а элементы $\mathbf{P}_m$ (пропагатора) представляют собой фазовые множители с амплитудами, зависящими от коэффициента отражения υ_m от *m*+1-го слоя в *m*-й слой. Этот коэффициент определяется известными формулами Френеля (см., например, [5] для звуковых или электромагнитных волн) и выражается через импеданс Z_m:

$$\upsilon_m = \left(Z_{m+1} - Z_m\right) / \left(Z_{m+1} + Z_m\right), \quad (3)$$

Обозначая $\mathbf{P}^{(m)} = \mathbf{P}_m \mathbf{P}_{m-1} ... \mathbf{P}_0$, приходим к уравнению $\mathbf{u}_{M+1} = \mathbf{P}^{(M)} \mathbf{u}_0$, где $\mathbf{u}_0 = (V,1)^T$, $\mathbf{u}_{M+1} = (0,W)^T$, откуда следует

$$V = -P_{12}^{(M)} / P_{12}^{(M)}, \quad W = w_M^{(0)} / P_{11}^{(M)} \quad (4)$$

где $w_M^{(0)} = \det \mathbf{P}^{(M)}$. Матричные элементы $P_{11}^{(m)}, P_{12}^{(m)}$ находятся с помощью достаточно простых реккурентных соотношений. Для решения обратной задачи необходимо ввести ряд дополнительных условий: (1) независимость импеданса и показателя преломления от частоты и (2) отсутствие поглощения. Для построения замкнутого алгоритма необходимо также наложить условие на способ разбиения неоднородной среды на однородные слои: последние должны иметь одинаковую оптическую толщину, т.е.

$$z_1 n_1^{(s)} = (z_2 - z_1) n_2^{(s)} = ... = (z_M - z_{M-1}) n_M^{(s)} = d \quad (5)$$

В этом случае элементы $P_{11}^{(m)}, P_{12}^{(m)}$ становятся тригонометрическими полиномами от $\varsigma = \exp(2i\kappa d)$ степени *m*: $P_m^{(1)}(\varsigma) = P_{11}^{(m)}(e^{2i\kappa d})$; $P_m^{(2)}(\varsigma) = P_{12}^{(m)}(e^{2i\kappa d})$. Нетрудно показать, что коэффициенты этих полиномов, $a_{m,l}^{(1)}$ и $a_{m,l}^{(2)}$, $l = 0,...,m$, определяются реккурентными соотношениями

$$\begin{aligned} a_{m,l}^{(1)} &= a_{m-1,l}^{(1)} - \upsilon_m a_{m-1,m-l}^{(2)}, \\ a_{m,l}^{(2)} &= a_{m-1,l}^{(2)} - \upsilon_m a_{m-1,m-l}^{(1)}, \end{aligned} \quad l = 1,...,m-1 \quad (6)$$

и явными выражениями: $a_{m,0}^{(1)} = 1$, $a_{m,0}^{(2)} = -\upsilon_0$, $a_{m,m}^{(1)} = \upsilon_0\upsilon_m$, $a_{m,m}^{(2)} = -\upsilon_m$. Совокупности полиномиальных коэффициентов удобно в дальнейшем рассматривать как треугольные $(M+1)\times(M+1)$ матрицы $\mathbf{A}_{1,2} = \left\| a_{m,l}^{(1,2)} \right\|$ с нулевыми элементами при $l > m$.

Переход во временную область выполняется с помощью z-преобразований: $V(\varsigma) = \sum_{l=0}^{\infty} r_l \varsigma^l, W(\varsigma) = \sum_{l=0}^{\infty} q_l \varsigma^l$, где r_l, q_l пропорциональны отсчетам ИПХ среды на отражение и прохождение в моменты $t_l = 2dl/c_0$ $(l = 0,1,...)$. При этом (4) переходит в

$$P_m^{(1)}(\varsigma)V(\varsigma) = -P_m^{(2)}(\varsigma); \quad P_m^{(1)}(\varsigma)W(\varsigma) = w_0^{(M)}, \tag{7}$$

где m=M. Таким образом, решение как прямой, так и обратной задач сводится к установлению явной связи между последовательностями (векторами) $\mathbf{r} = (r_0, r_1, ...)$ или $\mathbf{q} = (q_0, q_1, ...)$ и последовательностью (вектором) коэффициентов отражения $\boldsymbol{\upsilon} = (\upsilon_0, \upsilon_1, ..., \upsilon_M)$. Как следует из (7), эта связь устанавливается через коэффициенты полиномов $a_{m,l}^{(1)}$ и $a_{m,l}^{(2)}$:

$$r_0 = -a_{0,0}^{(2)} = \upsilon_0; \qquad r_l = -a_{m,l}^{(2)} - \sum_{l'=0}^{l-1} r_{l'} a_{m,l-l'}^{(1)}, \quad 1 \le l \le m \tag{8}$$

$$q_0 = w_0^{(m)}; \qquad q_l = -\sum_{l'=0}^{l-1} q_{l'} a_{m,l-l'}^{(1)}, \quad 1 \le l \le m \tag{9}$$

При решении прямой задачи $\boldsymbol{\upsilon} \to \mathbf{r}, \mathbf{q}$ матрицы $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ находятся с помощью реккурентных соотношений (6). Для $m > M$, т.е. для времен, превышающих время прихода отражения от последней границы между слоями,

$$r_m = -\sum_{l=1}^{M} r_{m-l} a_{M,l}^{(1)}, \qquad q_m = -\sum_{l=1}^{M} q_{m-l} a_{M,l}^{(1)} \tag{10}$$

Обратная задача $\mathbf{r} \to \boldsymbol{\upsilon}$ может быть решена двумя способами. Первый основан на том, что значение m в (8) для отраженного сигнала может не фиксироваться, а увеличиваться последовательно, начиная с 1. При этом получаем

$$\upsilon_m = \left(r_m + \sum_{l=1}^{m-1} r_l a_{m-1,m-l}^{(1)} \right) \left(1 + \sum_{l=0}^{m-1} r_l a_{m-1,l}^{(2)} \right)^{-1}, \quad m = 2,3,... \tag{11}$$

В (11) входят строки матриц $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ с номером m-1, которые вычисляются по коэффициентам $\upsilon_0, ..., \upsilon_{m-1}$, найденным на предыдущем шаге. Для m=0,1 берется $\upsilon_0 = r_0$, $\upsilon_1 = r_1/(1 - r_0^2)$ [1].

Второй способ позволяет строить решение обратной задачи для фиксированного m=M. Можно показать, что элементы m-й строки матрицы $\mathbf{A}_2$ являются решением системы линейных уравнений

$$r_l + a_{m,l}^{(2)} - \sum_{s=1}^{m} \overline{r}_{l,s} a_{m,s}^{(2)} = 0, \tag{12}$$

[1] Решение обратной задачи по отсчетам ИПХ на прохождение $q_0, q_1, ...$ представляет более сложную проблему. Можно показать, что оно неединственное, причем число возможных нетривиальных решений быстро увеличивается с ростом M.

с $(m+1)\times(m+1)$ матрицей системы $\mathbf{I}-\|\overline{r}_{l,s}\|$, где $\mathbf{I}$ – единичная матрица, $\overline{r}_{s,l}=\sum_{j=1}^{\min\{s,l\}} r_{l-j}r_{s-j}$, и $\upsilon_m=-a^{(2)}_{m,m}$. Можно далее в (12) устремить $d\to 0$, получая модифицированное уравнение Гельфанда-Левитана:

$$r(y)+\int_0^y \overline{r}(y,s)A_2(x,s)ds=-A_2(x,y)\,, \tag{13}$$

где $\upsilon(x)=-A_2(x,x);\ \upsilon(x_m)\to\upsilon_m/d,\ r(x_m)\to r_m/d$, и $\overline{r}(y,s)=\int_0^{\min\{y,s\}} r(y-s')r(s-s')ds'$.

Уравнение (13) отличается от канонического [3] и приведенного в [1,2] видом ядра; удобство (13) заключается в возможности его решения методом простых итераций; за начальное приближение берется $A_2^{(0)}=-r(y)$. Восстанавливаемая характеристика среды представляет собой производную импеданса: $\upsilon(x)=Z'(x)/2Z(x)$, аргументом которой является оптическая длина $x(z)=\int_0^z\sqrt{n^2(z')-\sin^2\theta}dz'$. Профиль импеданса находится как

$$Z_{m+1}=Z_0\prod_{l=0}^{m}\frac{\upsilon_l-1}{\upsilon_l+1}\approx Z_0\exp\left(2\sum_{l=0}^{m}\upsilon_l\right),\quad m=0,...,M+1 \tag{14}$$

а переход от оптической длины x_m к координате z_m при фиксированном угле θ возможен лишь в случае, когда из импеданса можно выделить показатель преломления, например, полагая $n_m^{(s)}=Z_0/Z_m$; тогда $z_m=d\sum_{l=1}^{m}1/n_m^{(s)},\quad m=1,...$.

Важным моментом является связь между порядками величин $\mathbf{r},\mathbf{q}$ и $\boldsymbol{\upsilon}$. Можно показать, что

$$r_m=\upsilon_m+o(\upsilon_m^3),\qquad q_m=w_M^{(0)}\left(\sum_{l=0}^{M-m}\upsilon_l\upsilon_{l+m}+o(\upsilon_m^4)\right), \tag{15}$$

так что при малых градиентах импеданса можно пренебречь следующими порядками малости υ_m, что соответствует приближению однократного рассеяния. Собственно, полученные выше точные решения и позволяют исследовать корректность данного приближения.

Численные примеры

Вначале рассмотрим особенности преобразования $\boldsymbol{\upsilon}\to\mathbf{r}$ и обратного преобразования $\mathbf{r}\to\boldsymbol{\upsilon}'$; $\boldsymbol{\upsilon}$ и $\boldsymbol{\upsilon}'$ могут несколько различаться из-за ошибок округления. На рис. 1 приведены графики последовательностей $\boldsymbol{\upsilon}$ и $\mathbf{r}$ для $\boldsymbol{\upsilon}$, взятого в виде случайного вектора длиной M=150 с равномерным распределением в интервале $[-\upsilon_0,\upsilon_0]$; там же приведена максимальная погрешность реконструкции $\max|\upsilon_m-\upsilon'_m|$. Как видно из рис.1, характер отраженного сигнала существенно меняется в зависимости от υ_0: при малых υ_0 $r_m\approx\upsilon_m$, а с увеличением υ_0 последовательность $|r_m|$ быстро убывает с ростом m: имеет место так называемый эффект кажущегося ослабления, подробно рассматривавшийся в литературе (см., например, [6]). Погрешность реконструкции при этом остается приемлемой, но увеличивается на ~12 порядков, что и иллюстрирует границы неустойчивости обратной задачи, появляющейся с увеличением M и υ_0.

При реконструкции непрерывных профилей с уменьшением шага дискретизации d одновременно уменьшаются величины υ_n и увеличивается длина обрабатываемого вектора M. Результаты реконструкции для этого случая при $\theta = 0$ проиллюстрируем на примере слоя с линейно меняющимся показателем преломления: $n(z) = 1 + (n_H - 1)z / H, 0 \le z < H$ и $n(z) = n_H, z \ge H$. Производная импеданса здесь находится в явном виде

$$\upsilon(x) = -\frac{n'(x)}{2n(x)} = -\frac{n_H - 1}{2[H + 2(n_H - 1)x]}, \quad 0 \le x < H \cdot (n_H + 1)/2; \qquad (16)$$

и $\upsilon(x) = 0$ при $x \ge H \cdot (n_H + 1)/2$. Соответственно $\upsilon_m = d \cdot \upsilon(md)$. На рис.2а показаны зависимости $\upsilon(x)$ и $r(x)$ в случае n_H=4; на рис.2б приведены результаты реконструкции профиля $n(z)$ с использованием преобразования $\mathbf{r} \to \boldsymbol{\upsilon}$ (этот профиль точно совпадает с исходным), и при подстановке в (14) непосредственно отсчетов ИПХ r_m, как это обычно делается на практике. Хотя отличия $\upsilon(x)$ и $r(x)$ невелики, во втором случае отклонение реконструированного профиля достаточно заметно. На рис.2в приведен график погрешности оценки показателя преломления во втором полупространстве, если преобразование $\mathbf{r} \to \boldsymbol{\upsilon}$ не используется, в зависимости от n_H; как следует из графика, при допустимой погрешности ~10% можно не прибегать к преобразованию $\mathbf{r} \to \boldsymbol{\upsilon}$ до значений n_0<3.

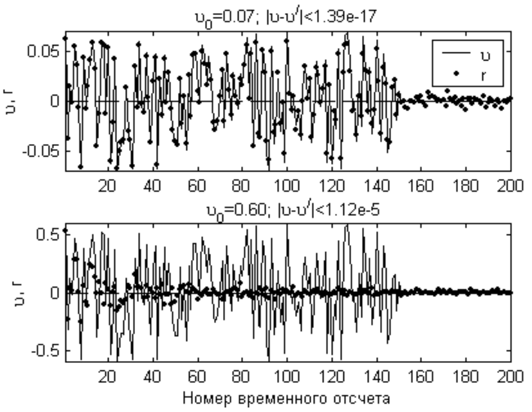

Рис. 1. Пример различий в r_m при разных величинах υ

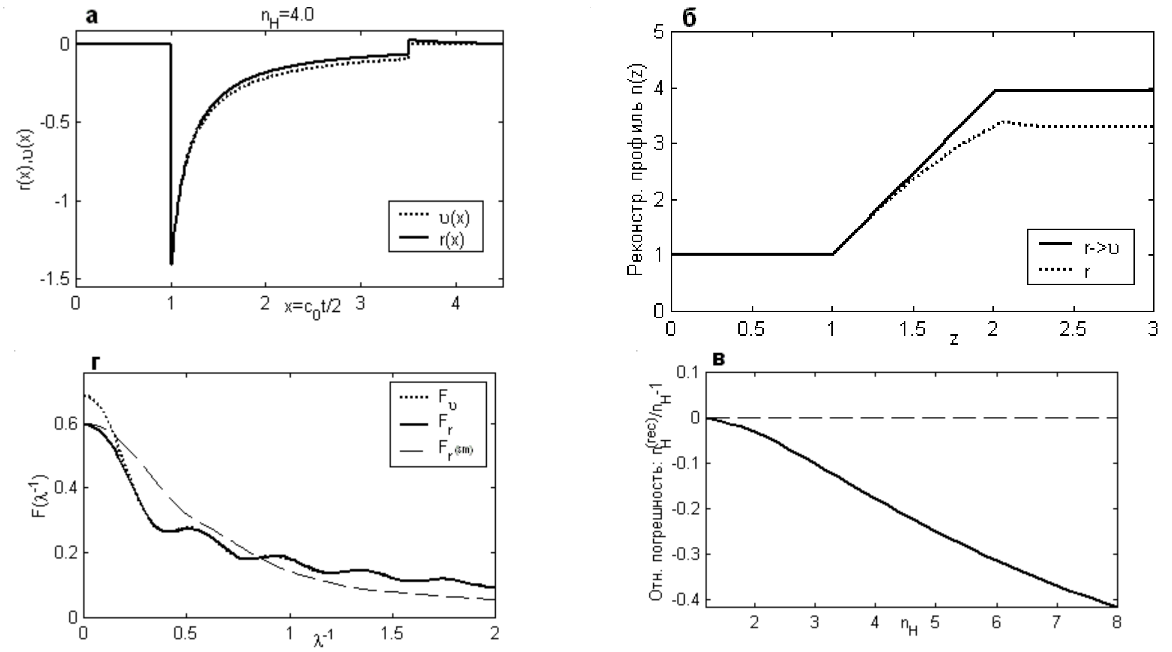

Рис. 2. Производная импеданса υ и ИПХ r для линейного слоя (а), реконструированные профили с преобразованием r→υ и непосредственно по отсчетам ИПХ (б), относительная погрешность реконструкции без преобразования r→υ (в) и спектры производной импеданса, ИПХ и ИПХ среды со «сглаженным» переходом от 1 к n_H (г)

На практике реально наблюдается отраженный сигнал вида $r(t) \otimes s(t)$, где $s(t)$ представляет форму зондирующего импульса, спектр которого сосредоточен в ограниченной области частот $f_{\min} < f < f_{\max}$. Расчеты показали, что ширина импульса $\sim 1/(f_{\max} - f_{\min})$ не играет существенной роли: применение процедуры $\mathbf{r} \to \boldsymbol{\upsilon}$ к наблюдаемому сигналу приводит к сглаженному профилю без искажения количественных характеристик. Более существенным оказывается пропуск нижних частот. На рис.2г приведены модули спектров $F(\lambda^{-1})$ функций $\upsilon(x)$, $r(x)$ и $r^{(sm)}(x)$ - ИПХ сглаженного профиля, образованного двумя сплайнами 2-го порядка; здесь $\lambda^{-1} = 2f/c_0$. Эти спектры имеют главный максимум с шириной $\Delta\lambda^{-1} \sim 2/(n_H + 1)H$. Соответственно спектр зондирующего импульса должен «захватывать» этот главный максимум, т.е. должно выполняться условие $f_{\min} \ll c_0/(n_H + 1)H$; в противном случае непрерывные компоненты профиля импеданса просто не будут воспроизводиться.

Литература

1. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология: Теория и методы. Т.2. Пер. с англ.-М.: Мир, 1983.-360 С.
2. Робинсон Э.А. Спектральный подход к решению обратной задачи в геофизике на основе преобразований Лоренца, Фурье и Радона. ТИИЭР, 1982, Т.70, №9, С.153-171.
3. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. М.: Наука, 1984.-240 С.
4. Молотков Л.А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. Л.: Наука, 1984.-201 С.
5. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.-343 С.
6. Maweu J.M., Margrave G.F. Dispersion and apparent attenuation due to fine stratigraphy. CREWES Research Report, 2007, V.19, P.1-9