

## Функции неопределенности многочастотных пачечных сигналов с большой базой

В.В. Чапурский

Московский Государственный технический университет им. Н. Э. Баумана  
vchapursky@rslab.ru

*Введено понятие обобщенного многочастотного сигнала в виде пачки многочастотных импульсов. Исследованы и сопоставлены функции неопределенности двух типов таких сигналов при классической равномерной сетке частот с одинаковым составом частотных компонент в каждом импульсе и при расположении частотных компонент различных импульсов в неперекрывающихся частотных интервалах.*

*The concept for the generalized multifrequency signal as a burst of multifrequency pulses is introduced. Ambiguity functions of two types of such signals are investigated and compared at a classical uniform grid of frequencies with identical structure of frequency components in each pulse and at an arrangement of frequency components of various pulses in not overlapped frequency intervals*

В настоящее время известны и в некоторой степени изучены широкополосные (ШП) и сверхширокополосные (СШП) многочастотные радиолокационные зондирующие сигналы (ЗС) с взаимно ортогональными частотными компонентами [1-3]. К ним, прежде всего, относятся моноимпульсные многочастотные (ММЧ) сигналы и сигналы со ступенчатой частотной модуляцией (СЧМ) [3]. Частотные компоненты ММЧ ЗС излучаются одновременно в пределах одного радиоимпульса длительности  $\tau_{\text{и}}$ . Ортогональность частотных компонент ММЧ ЗС по спектру имеет место внутри одного импульса при постоянном шаге по частоте, удовлетворяющем условию  $\Delta f = \tau_{\text{и}}^{-1}$ . При общем числе частотных компонент  $M + 1$  частотная полоса импульса составит приблизительно  $\Delta F \approx (M + 1)\tau_{\text{и}}^{-1}$ . Возможны два простейших вида пачек ММЧ импульсов: *обыкновенная* регулярная пачка, в которой все импульсы являются идентичными, и *нетрадиционная* регулярная пачка, при которой эквидистантные по частоте компоненты для различных импульсов лежат в неперекрывающихся частотных интервалах. Общая частотная полоса пачки из  $I + 1$  импульсов составит  $\Delta F \approx (I + 1)(M + 1)\tau_{\text{и}}^{-1}$ . Такая пачка в совокупности может быть СШП ЗС, имеющим высокое дальностное разрешение. При излучении пачек большой длительности даже для *обыкновенных* пачек одинаковых узкополосных ММЧ импульсов общая частотно-временная база пачки может составить значительные величины (при большой разрешающей способности по скорости). Тем более это имеет место в случае *нетрадиционных* регулярных ШП и СШП пачек. В обоих случаях анализ двумерных функций неопределенности (ФН) имеет известную специфику, связанную с необходимостью замены доплеровского смещения частоты доплеровским растяжением-сжатием реализаций пачечных сигналов. До настоящего времени соответствующие аналитические выражения для ФН и результаты их анализа для пачечных ММЧ сигналов двух указанных видов не публиковались.

В докладе в связи с указанной задачей введено понятие обобщенного многочастотного сигнала (ОМЧ) в виде пачки ММЧ импульсов с произвольным распределением частотных компонент и для него получено общее аналитическое выражение ФН. На его основе исследованы и сопоставлены сечения двумерных ФН по задержке и по скорости для *обыкновенной* и *нетрадиционной* пачек ММЧ импульсов.

### Функция неопределенности обобщенного ММЧ сигнала

Рассмотрим математическое описание ОМЧ сигналов с произвольными видами распределения частотных компонент в виде пачек ММЧ импульсов с постоянным периодом повторения  $T_r$ , которые могут иметь от периода к периоду разный состав некоторого количества частотных компонент. Упомянутые во введении ММЧ и СЧМ сигналы являются частными случаями ОМЧ сигнала.

Выражение для ОМЧ ЗС представим в виде пачки ММЧ импульсов, для каждого из которых не исключается и случай одной частоты:

$$\dot{s}_\Sigma(t) = \sum_{i=0}^I A(t - iT_r) \sum_{m=0}^{M_i} a_{m,i} \exp\{j\omega_{m,i}(t - iT_r)\}, \quad (1)$$

где  $T_r$  - период повторения ММЧ импульсов,  $A(t)$  - их огибающая,  $\omega_{m,i}$  и  $a_{m,i}$  - некоторый набор частот и амплитуд частотных компонент при  $i = 0, 1, \dots, I$ ,  $m = 0, 1, \dots, M_i$ , в общем случае отличающийся от периода к периоду, т.е. различный при разных  $i$ . В дальнейшем для простоты анализа рассматривается вариант, когда  $M_i = M$ . Случай неодинаковых  $M_i \leq M$  может также моделироваться установкой нулевых значений  $a_{m,i} = 0$  при  $m = M_i + 1, M_i + 2, \dots, M$  и  $M_i < \max M_i$ . При  $M_i = M$  частоты  $\omega_{m,i}$  образуют прямоугольную матрицу  $\|\omega_{m,i}\|$ , элементы которой могут быть распределены в общем случае произвольным образом. В частном случае все  $m$ -ые столбцы матрицы могут быть одинаковыми и иметь постоянный шаг по частоте, что соответствует пачке обычных ММЧ импульсов. При  $I = 0$  имеем одиночный ММЧ импульс, а при  $M = 0$  имеем СЧМ сигнал с  $I + 1$  частотными компонентами.

Частотные компоненты ОМЧ сигнала внутри соседних или двух любых импульсов могут занимать не перекрывающиеся частотные полосы, и тогда эти импульсы будут ортогональны друг другу и по времени и по спектру. В простейшем случае частоты компонент во всей пачке могут быть выбраны из сетки частот с постоянным шагом  $\Delta\omega > 0$ , и тогда для элементов частотной матрицы можно записать:

$$\omega_{m,i} = \omega_0 + \Delta\omega(m + i(M + 1)), \quad i = 0, 1, \dots, I, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad (2)$$

где  $\omega_0$  - частота начальной частотой компоненты. Общее число различных частотных компонент при  $M_i = M$  может быть равно  $(M + 1)(I + 1)$ . Для сокращения записи формул и упрощения выкладок представим ОМЧ ЗС (1) в форме:

$$\dot{s}_\Sigma(t) = \sum_{i=0}^I \dot{s}_i(t - iT_r), \quad \text{где } \dot{s}_i(t) = A(t) \sum_{m=0}^{M_i} a_{m,i} \exp\{j\omega_{m,i}t\}. \quad (3)$$

В общем случае сигналов, имеющих большую частотно-временную базу, как за счет большой длительности пачки при ШП импульсах, и (или) за счет излучения СШП ММЧ импульсов, принимаемый  $\dot{s}_{rec}(t)$  и опорный  $\dot{s}_{ref}(t)$  сигналы при зондирующем сигнале вида (3) должны учитывать не просто задержки и частоты Доплера, но доплеровское растяжение - сжатие сигналов [4]:

$$\dot{s}_{rec}(t) = \dot{s}_\Sigma((t - \tau)(1 - \alpha)), \quad \dot{s}_{ref}(t) = \dot{s}_\Sigma((t - \tau_0)(1 - \alpha_0)), \quad (4)$$

где  $\tau$  и  $\tau_0$ ,  $1 - \alpha = 1 - 2v/c$  и  $1 - \alpha_0 = 1 - 2v_0/c$  - задержки и коэффициенты растяжения - сжатия в принимаемом и опорном сигналах при соответствующих радиальных скоростях цели  $v$  и  $v_0$ ,  $c$  - скорость света.

Корреляционный интеграл сигналов с большой базой (4) может быть с высокой точностью преобразован следующим образом [5]:

$$\mathcal{Q}(\tau, \alpha; \tau_0, \alpha_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}_{\Sigma}^{\&}(t - \tau)(1 - \alpha) \mathcal{S}_{\Sigma}^{\&*}((t - \tau_0)(1 - \alpha_0)) dt \approx \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}_{\Sigma}^{\&}(t) \mathcal{S}_{\Sigma}^{\&*}((1 + \Delta\alpha)(t + \Delta\theta)) dt, \quad (5)$$

где  $\Delta\theta = (1 - \alpha)(\tau - \tau_0) \approx \tau - \tau_0 = \Delta\tau$ ,  $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0$ . Подстановка первой формулы из (3) в формулу (5) после замены переменных интегрирования и учета конечной длительности огибающей импульсов приводит к следующему результату:

$$\mathcal{Q}(\Delta\theta, \Delta\alpha) = \sum_{i_1, i_2=0}^I \mathcal{Q}_{i_1, i_2}(\Delta\theta, \Delta\alpha), \quad (6)$$

где

$$\mathcal{Q}_{i_1, i_2}(\Delta\theta, \Delta\alpha) = \int_0^{\tau_n} \mathcal{S}_{i_1}^{\&}(t) \mathcal{S}_{i_2}^{\&*}[(1 + \Delta\alpha)(t + \Delta\theta + i_1 T_r) - i_2 T_r] dt. \quad (7)$$

С помощью метода, примененного при анализе ФН пачки СШП видеоимпульсов в [5], двойную сумму (6) преобразуем к виду, характерному для ФН пачечного сигнала:

$$\mathcal{Q}(\Delta\theta, \Delta\alpha) = \sum_{n=-I}^I \mathcal{X}_n(\Delta\theta, \Delta\alpha), \quad (8)$$

где  $\mathcal{X}_n(\Delta\theta, \Delta\alpha)$  -  $n$ -ый лепесток ФН пачечного сигнала на плоскости  $(\Delta\theta, \Delta\alpha)$ , который вычисляется по следующим формулам:

$$\mathcal{X}_n(\Delta\theta, \Delta\alpha) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{I-n} \int_0^{\tau_n} \mathcal{S}_i^{\&}(t) \mathcal{S}_{i+n}^{\&*}[(1 + \Delta\alpha)(t + \Delta\theta) + T_r(\Delta\alpha \cdot i - n)] dt, & n \geq 0, \\ \sum_{i=0}^{I-|n|} \int_0^{\tau_n} \mathcal{S}_{i+|n|}^{\&}(t) \mathcal{S}_i^{\&*}[(1 + \Delta\alpha)(t + \Delta\theta) + T_r(\Delta\alpha \cdot i + (1 + \Delta\alpha)|n|)] dt, & n < 0, \end{cases} \quad (9)$$

Для прямоугольной огибающей  $A(t)$  с единичной амплитудой на интервале  $(0, \tau_n)$  после подстановки в (9) второй формулы из (3) интегрирование проводится в явной форме, и верхний и нижний интегралы (9) получаются в виде:

$$\mathfrak{Z}_1 = \sum_{i=0}^{I-n} h(b_1(i, n) - a_1(i, n)) \sum_{m_1, m_2=0}^M a_{m_1, i} a_{m_2, i+n} \exp\{-j\omega_{m_2, i+n} [\Delta\theta(1 + \Delta\alpha) + T_r(i\Delta\alpha - n)]\} \times \\ \times \exp\left\{j\Omega_{1m_1, m_2}^{(i, n)} \cdot (b_1(i, n) + a_1(i, n))/2\right\} \frac{\sin\left\{\Omega_{1m_1, m_2}^{(i, n)} \cdot (b_1(i, n) - a_1(i, n))/2\right\}}{\Omega_{1m_1, m_2}^{(i, n)}/2}. \quad (10)$$

$$\mathfrak{Z}_2 = \sum_{i=0}^{I-n} h(b_2(i, n) - a_2(i, n)) \sum_{m_1, m_2=0}^M a_{m_1, i+|n|} a_{m_2, i} \exp\{-j\omega_{m_2, i} [\Delta\theta(1 + \Delta\alpha) + T_r(i\Delta\alpha + (1 + \Delta\alpha)|n|)]\} \times \\ \times \exp\left\{j\Omega_{2m_1, m_2}^{(i, n)} \cdot (b_2(i, n) + a_2(i, n))/2\right\} \frac{\sin\left\{\Omega_{2m_1, m_2}^{(i, n)} \cdot (b_2(i, n) - a_2(i, n))/2\right\}}{\Omega_{2m_1, m_2}^{(i, n)}/2}. \quad (11)$$

В формулах (10) и (11) использованы следующие обозначения:

$$a_k(i, n) = \max[0, t_{\text{нк}}(i, n)], \quad b_k(i, n) = \min[\tau_n, t_{\text{нк}}(i, n)], \quad k = 1, 2; \quad (13)$$

$$t_{\text{н1}}(i, n) = \frac{T_r(n - i\Delta\alpha)}{1 + \Delta\alpha} - \Delta\theta; \quad t_{\text{н1}}(i, n) = \frac{T_r(n - i\Delta\alpha) + \tau_n}{1 + \Delta\alpha} - \Delta\theta; \quad (14)$$

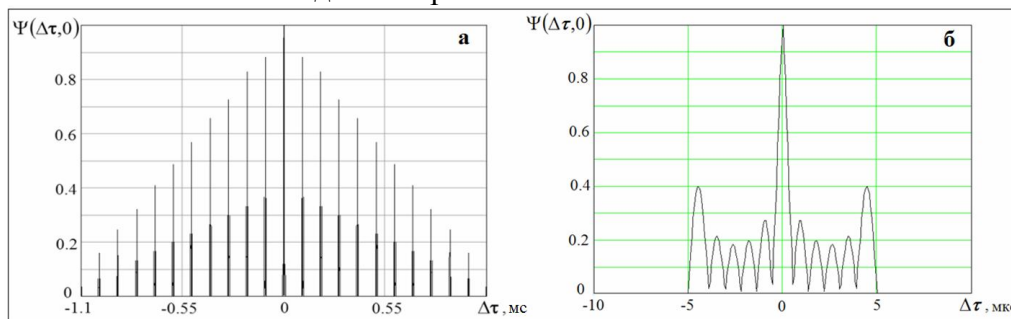
$$t_{\text{н2}}(i, n) = \frac{-T_r(i\Delta\alpha + (1 + \Delta\alpha)|n|)}{1 + \Delta\alpha} - \Delta\theta; \quad t_{\text{н2}}(i, n) = \frac{\tau_n - T_r(i\Delta\alpha + (1 + \Delta\alpha)|n|)}{1 + \Delta\alpha} - \Delta\theta. \quad (15)$$

$$\Omega_{1m_1,m_2}^{(i,n)} = \omega_{m_1,i} - \omega_{m_2,i+n}(1 + \Delta\alpha); \quad \Omega_{2m_1,m_2}^{(i,n)} = \omega_{m_1,i+|n|} - \omega_{m_2,i}(1 + \Delta\alpha). \quad (16)$$

По оси  $\Delta\theta$  при  $\Delta\alpha = 0$  компоненты  $\chi_n(\Delta\theta, \Delta\alpha)$  в (8) разделены интервалами длиной  $T_r$  и сосредоточены вблизи точек их локальных максимумов  $\Delta\theta_n = nT_r$  при целочисленных значениях  $n$ , удовлетворяющих неравенству  $|n| \leq I$ . Ширина компонент по оси  $\Delta\theta$  при  $\Delta\alpha = 0$  дается величиной порядка  $2\tau_n$ , которая меньше периода повторения ( $2\tau_n \ll T_r$ ), как правило, на несколько порядков. Это предопределяет практическую трудность построения ФН пачки  $\Psi(\Delta\theta, \Delta\alpha) = |\dot{Q}(\Delta\theta, \Delta\alpha)| / |\dot{Q}(0,0)|$  на всем интервале задержек плоскости  $(\Delta\theta, \Delta\alpha)$ . Для преодоления этой трудности ниже используется построение сечений ФН на интервалах задержек разной длины.

### Сечения функций неопределенности пачечных ММЧ сигналов

**Обыкновенная пачка ММЧ сигнала с одинаковым распределением частот в каждом ММЧ импульсе.** Для определенности принимались следующие параметры обыкновенного пачечного ММЧ сигнала с идентичными ММЧ импульсами и одинаковым распределением частот ортогональных компонент: число импульсов в пачке  $I + 1 = 12$ , период повторения в режиме средних частот повторения (СЧП)  $T_r = 100$  мкс, период повторения в режиме низких частот повторения (НЧП)  $T_r = 1000$  мкс, длительность импульса  $\tau_n = 5$  мкс, полоса частот ММЧ импульсов  $\Delta F = 1$  МГц, количество частот  $M + 1 = 6$ , шаг по частоте  $\Delta f = 200$  кГц, начальная частота сетки частот  $f_0 = 150$  МГц, конечная частота сетки частот  $f_0 + M\Delta f = 151$  МГц. Результаты вычисления сечений ФН пачки даны на рис. 1 – 3.



**Рис. 1. Сечения по задержке ФН пачки 12 идентичных ММЧ импульсов длительностью 5 мкс с периодом следования 100 мкс: а) на интервале удвоенной длины пачки, б) на интервале удвоенной длины импульса**

Из рис. 1а. видно, что сечение ФН по задержке для всей пачки имеет, как и следовало ожидать, общую треугольную огибающую. Локальные лепестки ФН в данном временном масштабе практически не воспроизводятся, поэтому форма центрального лепестка ФН представлена на рис. 1б на уменьшенном временном интервале. В данном случае центральный и боковые лепестки на временных интервалах  $(mT_r - \tau_n, mT_r + \tau_n)$ , где  $m$  - номер лепестка, имеют одинаковую форму, отличаясь амплитудой, что естественно для идентичных импульсов в пачке. Форма лепестков на концах интервалов содержит частично подавленные лепестки неоднозначности, а также ближние боковые лепестки заметного уровня. Форма центрального лепестка имеет характерное для ММЧ сигналов сужение по сравнению с шириной элемента разрешения по задержке  $\Delta\tau = \Delta F^{-1} = 1$  мкс.

Сечение ФН по параметру скорости  $\Delta\alpha = 2v/c = F/f_0$ , совпадающему с нормированной частотой Доплера на начальной частоте спектра  $f_0$ , представлено на рис. 2а. Видно наличие интервала неоднозначности, отвечающего при частоте повторения 10 кГц величине  $(T_r f_0)^{-1} = 6.7 \cdot 10^{-5}$ , а также разрешающей способности по частоте около 90Гц при данной длине пачки.

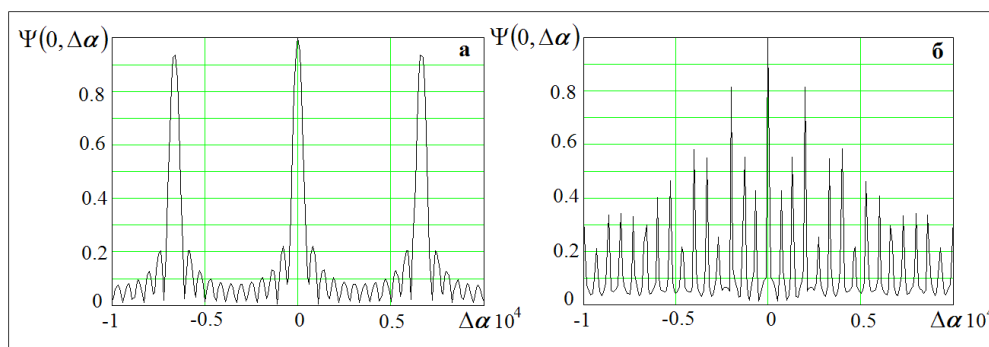
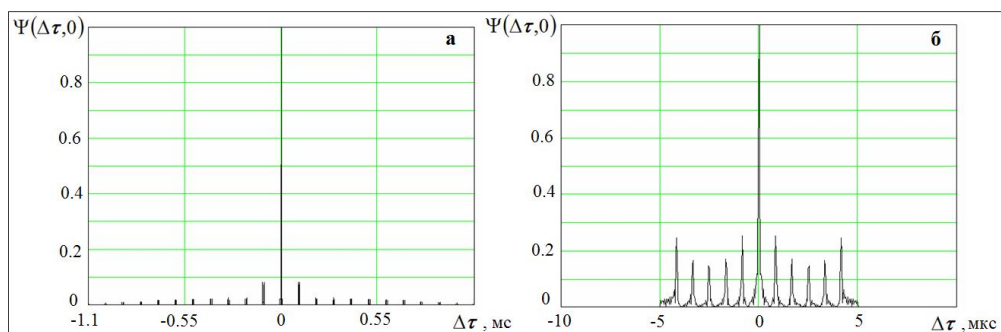


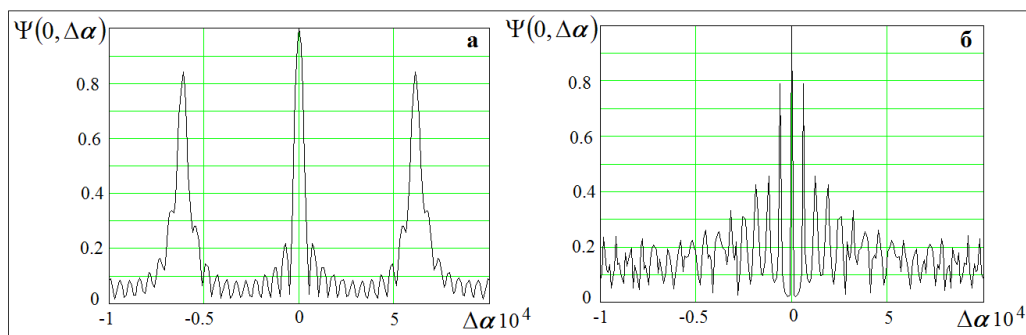
Рис. 2. Сечения по скорости ФН обыкновенной пачки из 12 ММЧ импульсов, а) период повторения  $T_r = 0.1$  мс, б) период повторения  $T_r = 1$  мс

В случае увеличения периода повторения до значения  $T_r = 1$  мс сечение по скорости представлено на рис. 2б, из которого следует уменьшение на порядок интервала однозначного измерения скорости при соответствующем улучшении разрешающей способности.

**Нетрадиционная регулярная пачка с неперекрывающимися полосами отдельных ММЧ импульсов.** Помимо обычного пачечного ММЧ сигнала рассмотрим пачечный ОМЧ сигнал, представляющий собой регулярную пачку, частотные полосы отдельных ММЧ импульсов в которой не перекрываются. Каждый ММЧ импульс такой пачки содержит  $M + 1$  частот, выбираемых из общей равномерной частотной сетки в количестве  $(M + 1)(I + 1)$  частот таким образом, чтобы частоты соседних импульсов выбирались из соседних прилегающих, но не перекрывающихся групп частот. Общая полоса такого сигнала может быть увеличена по сравнению с предыдущим примером в соответствии с выражением  $\Delta F = \Delta f (M + 1)(I + 1)$ . В остальном параметры сигнала отвечают предыдущему примеру обыкновенной ММЧ пачки. При  $T_r = 0.1$  мс сечение по задержке ФН пачки представлено на рис. 3а. Оно характерно высоким центральным лепестком и весьма низкими уровнями побочных лепестков, что свидетельствует о практическом отсутствии неоднозначности по задержке в пределах длительности пачки, что несомненно является основным положительным качеством такого сигнала. Другой особенностью является возможность получения широкой полосы изучения и высокого разрешения по задержке всей пачки в целом, отвечающего ее увеличенной полосе частот  $\Delta F = \Delta f (M + 1)(I + 1) = 14.4$  МГц. Центральный лепесток ФН (рис. 3б) весьма узкий, что обусловлено всей полосой частот пачки. Имеют место узкие побочные лепестки уровня  $-14$  дБ. Эти лепестки симметричны относительно центрального пика и по количеству с одной стороны равны числу частот ММЧ импульса, а по интервалу задержки между ними  $1/(\Delta f (M + 1))$  отвечают частотному интервалу между соседними ММЧ импульсами.



**Рис. 3.** Сечение по задержке ФН нетрадиционной пачки ММЧ импульсов с равномерной сеткой частот и неперекрывающимися по спектру ММЧ импульсами, а) на интервале удвоенной длины пачки, б) на интервале удвоенной длины импульса



**Рис. 4.** Сечения ФН нетрадиционной регулярной пачки ММЧ по параметру скорости  $\Delta\alpha$ , а) период повторения  $T_r = 0.1$  мс, б) период повторения  $T_r = 1$  мс

Вид сечений ФН по нормированной скорости представлен соответственно на рис. 4а ( $T_r = 0.1$  мс) и 4б ( $T_r = 1$  мс). Видно, что при низкой частоте повторения заметно уменьшилась область неоднозначности измерений по Доплеру по сравнению с предыдущим случаем обычной пачки.

### Литература

1. G. Dorey, G. Garnier et G. Auvray, "RIAS, radar a impulsion et antenne syntetique", Colloque International sur le Radar. Paris, april, 1989, pp.556-562.
2. Вовшин Б.М., Свердлов Б.Г. Теоретические и экспериментальные исследования сверхширокополосных радиолокационных систем с ортогональными зондирующими сигналами. Труды 1-й Международного радиоэлектронного форума «Прикладная радиоэлектроника. Состояние и перспективы развития», МРФ-2002, 8-10 октября 2002г., г. Харьков, стр.62-64.
3. Чапурский В.В. Функции неопределенности СШП многочастотных сигналов. Труды конференции «Сверхширокополосные сигналы и сверхкороткие импульсы в радиолокации, связи и акустике». Суздаль, 27-29 сентября 2005 г. , с.21-25.
4. Справочник по радиолокации. Под ред. М. Скольника, т.1 М., Сов радио, 1976
5. Чапурский В.В. Функции неопределенности пачек сверхширокополосных импульсов. Труды III Всероссийской конференции «Радиолокация и радиосвязь», 26-30 октября 2009г. ИРЭ РАН, Москва.Т.2, с. 188-192.